Zadaci iz predmeta

INDUSTRIJSKA ROBOTIKA

- Elektromehaničke analogije -

PRELIMINARNA VERZIJA

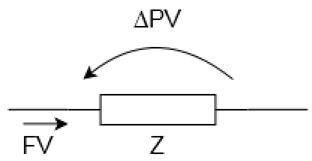
dr Kalman Babković
tehnička obrada: Nikola Rašević

revizija: jun 2024.

1 Uopštene elektromehaničke analogije

Za primenu neophodno je uvođenje **operatora** diferenciranja - oznaka će biti **D**, a primenjivaće se množenjem sa izrazom koji se diferencira.

Pojam impedanse



$$Z = \frac{\Delta PV}{FV}$$

PV - promenljiva potencijala
FV - promenljiva toka

Pri primeni uopštenih elektromehaničkih analogija ovim hipotetičkim promenljivama (PV i FV) se pridružuju prave fizičke veličine koje učestvuju u problemu koji se rešava.

1.1 Translatorni mehanički sistemi

Opruga:

$$F = -K \cdot \Delta x \tag{1}$$

Ako usvojimo da je **PV** pomeraj - **x**, a **FV** sila - **F**:

$$FV = K \cdot \Delta PV \tag{2}$$

$$\Delta PV = \frac{FV}{K} \tag{3}$$

$$Z_K = \frac{\Delta PV}{FV} = \frac{FV}{K \cdot FV} = \frac{1}{K} \tag{4}$$

Ako pak usvojimo da je PV' brzina - $\frac{dx}{dt}$, imaćemo da je $PV' = D \cdot PV$ (D je operator diferenciranja).

$$\Delta PV' = D\frac{FV}{K} \tag{5}$$

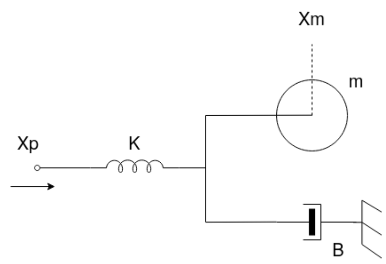
$$Z'_K = \frac{\Delta PV'}{FV} = \tag{6}$$

$$Z_K = \frac{\Delta PV}{FV} = \frac{FV}{K \cdot FV} = \frac{1}{K} \tag{7}$$

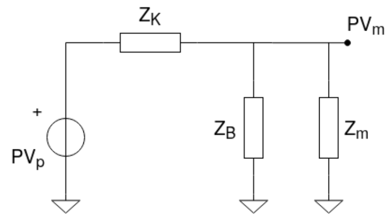
Istim rezonovanjem dolazimo do zaključka i za ostale elemente:

	masa	opruga	amortizer
položaj	$Z_m = \frac{1}{D^2 m}$	$Z_K = \frac{1}{K}$	$Z_B = \frac{1}{DB}$
brzina	$Z_m = \frac{1}{Dm}$	$Z_K = \frac{D}{K}$	$Z_B = \frac{1}{B}$

Primer 1:



PV_p - pobudni pomeraj, PV_m - pomeraj mase.
Sve možemo da nacrtamo kao ekvivalentno (analogno) električno kolo koristeći impedanse.
Impedansa koja predstavlja masu, jednim krajem je uvek na fiksnom potencijalu - masi.



Rešavamo za PV_m kao i svako električno kolo sa impedansama. U suštini, sve je potpuno isto kao pri rešavanju električnih kola u prinudnom režimu.

$$PV_m = \frac{Z_B \parallel Z_m}{Z_B \parallel Z_m + Z_K} \cdot PV_p \tag{8}$$

$$Z_B \parallel Z_m = \frac{\frac{1}{DB} \cdot \frac{1}{D^2m}}{\frac{1}{DB} + \frac{1}{D^2m}} = \frac{\frac{1}{DB \cdot D^2m}}{\frac{Dm+B}{D^2Bm}} = \frac{1}{D\,(Dm+B)} \tag{9}$$

Prenosna funkcija:

$$\frac{PV_m}{PV_p} = \frac{\frac{1}{D\,(Dm+B)}}{\frac{1}{D\,(Dm+B)} + \frac{1}{K}} = \frac{\frac{1}{D\,(Dm+B)}}{\frac{K + D^2m + DB}{D\,(Dm+B)\,K}} = \frac{K}{D^2m + DB + K} \tag{10}$$

Diferencijalna jednačina koja daje rešenje za $x_m(t)$:

$$m\frac{d^2x_p}{dt^2} + B\frac{dx_p}{dt} + K \cdot x_p = K \cdot x_p(t) \tag{11}$$

Prenosna funkcija se često koristi za utvrđivanje karakteristične jednačine sistema koja se dobija zamenom D u imeniocu sa p i rešavanjem jednačine koja se dobije izjednačavanjem imenioca sa 0:

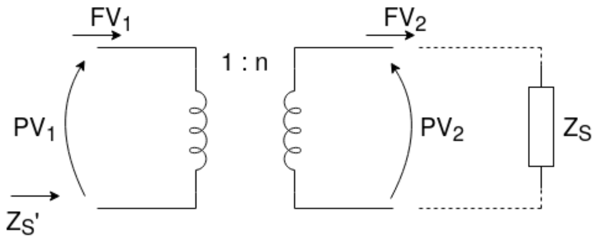
$$p^2m + pB + K = 0 \tag{12}$$

Rešavanje ove jednačine po p daće polove sistema.

1.2 Rotacioni sistemi

	moment inercije	torziona opruga	rotacioni amortizer
ugao	$Z_m = \dfrac{1}{D^2 J}$	$Z_K = \dfrac{1}{K}$	$Z_B = \dfrac{1}{DB}$
ugaouna brzina	$Z_m = \dfrac{1}{DJ}$	$Z_K = \dfrac{D}{K}$	$Z_B = \dfrac{1}{B}$

1.3 Upotreba idealnog transformatora



$$PV_2 = nPV_1$$

$$FV_1 = nFV_2$$

Impedansa zakačena na sekundar gledana sa primarne strane se može izračunati kao:

$$Z'_S = \frac{PV_1}{FV_1} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{PV_2}{FV_2} = \frac{Z_s}{n^2}$$

Transformator se često koristi za:

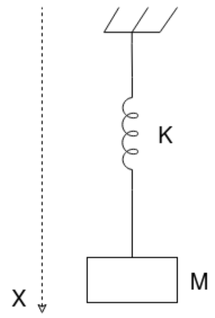
- rešavanje sistema gde je deo translatoran, a deo rotacioni
- rešavanje reduktora/multiplikatora
- rešavanje poluga

U ovim sistemima se jedna koordinata transformiše u drugu (PV), a sile se istovremeno transformišu u obrnutoj razmeri.

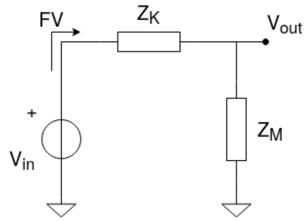
2 Zadaci sa elektromehaničkim analogijama

Zadatak 1:

Izračunati frekvenciju oscilovanja tereta koji visi na užetu. Masa užeta je zanemarljiva $k = 0$ DC komponenta, pa se slobodno može zanemariti. $M = 50\,\text{kg}$, $K = 2000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$



PV - položaj
FV - sila



$$Z_K = \frac{1}{K} \qquad Z_M = \frac{1}{MD^2}$$

$$FV = \frac{PV_{in}}{Z_K + Z_M} = \frac{PV_{in}}{\frac{1}{K} + \frac{1}{MD^2}} = \frac{D^2MK}{MD^2 + K} PV_{in}$$

$$PV_{out} = Z_M \cdot FV = \frac{1}{MD^2} \frac{MD^2K}{MD^2 + K} PV_{in}$$

$$\frac{PV_{out}}{PV_{in}} = \frac{K}{K + MD^2}$$

U obliku diferencijalne jednačine:

$$PV_{out} \cdot (K + MD^2) = K \cdot PV_{in}$$
$$K \cdot PV_{out} + MD^2 \cdot PV_{out} = K \cdot PV_{in}$$
$$MD^2 \cdot PV_{out} + K \cdot PV_{out} = K \cdot PV_{in}$$
$$M\frac{d^2}{dt^2}PV_{out} + K \cdot PV_{out} = K \cdot PV_{in}$$

Odavde možemo izvući karakteristični polinom:

$$Mk^2 + k = 0$$

$$k^2 = -\frac{K}{M} \qquad k = \pm j\sqrt{\frac{K}{M}} = 0 \pm j\beta$$

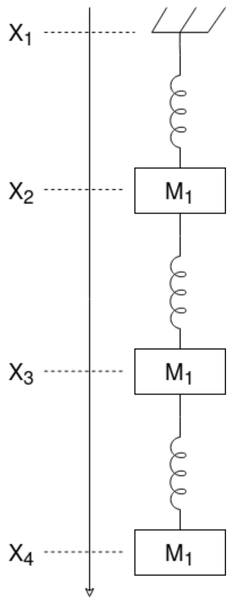
$$\alpha = 0$$

$$\beta = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{2000}{50}} = 6.32\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \omega$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1.006\,\text{Hz}$$

Zadatak 2:

Isti taj zadatak uraditi ako uže nije bez mase. Masa tereta i elastičnog užeta je ista, ali uže ima masu od $2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}} = m'$. Dužina užeta je $L = 9\,\text{m}$.



$$M_1 = \frac{L}{3} \cdot m' = 6\,\text{kg}$$

$$M_2 = \frac{L}{3} \cdot m' = 6\,\text{kg}$$

$$M_3 = \frac{L}{3} \cdot m' + M = 56\,\text{kg}$$

Hukov zakon:

$\sigma = \dfrac{F}{A}$ - poprečni napon

$\delta = \dfrac{\Delta x}{x}$ - rel. izduženje

$\sigma = E \cdot \delta$

$$\Delta x = \delta x = \frac{\sigma}{E} x = \frac{F}{A \cdot E} x$$

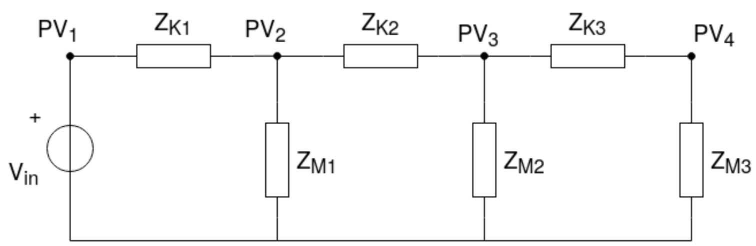
$$\Delta x = \frac{F}{\frac{A \cdot E}{x}} \qquad F = \frac{A \cdot E}{L} \Delta x$$

Otuda je:

$$K_1 = K_2 = K_3 = \frac{\Delta E}{\frac{L}{3}} = 3 \cdot K_{staro} =$$

$$= 3 \cdot 2000 = 6000\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}$$

Šema:



Dobijamo složeniju jednačinu iz koje slede frekvencije viših **modova** oscilovanja.

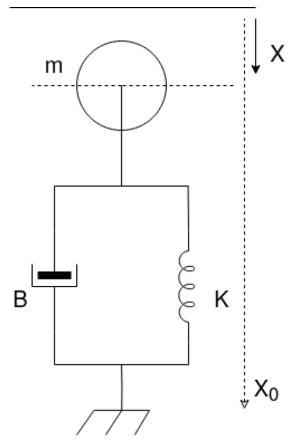
$3 \times D^2 \to$ jednačina 6. reda $\to$ 3 frekvencije oscilovanja.

Zadatak 3:

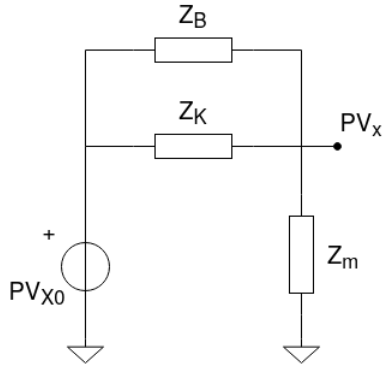
Na slici je prikazan mehanički sistem sastavljen od opruge krutosti K, kugle mase m i amortizera koeficienta prigušenja B.

a) Nacrtati analogno električno kolo.

b) Pomoću njega, odrediti minimalnu vrednost B tako da sistem nema oscilatorno ponašanje.



$$\left.\begin{array}{l} PV \to brzina \\ FV \to sila \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} Z_K = \dfrac{D}{K} \\ Z_m = \dfrac{1}{Dm} \\ Z_B = \dfrac{1}{B} \end{array}$$



$$PV_x = \frac{Z_m}{Z_m + Z_B \parallel Z_K} PV_{x_0} = \frac{\frac{1}{Dm} PV_{x_0}}{\frac{1}{Dm} + \frac{\frac{1}{B} \cdot \frac{D}{K}}{\frac{1}{B} + \frac{D}{K}}} = \frac{\frac{1}{Dm} PV_{x_0}}{\frac{1}{Dm} + \frac{\frac{D}{BK}}{\frac{K+DB}{BK}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{Dm} PV_{x_0}}{\frac{1}{Dm} + \frac{D}{K+DB}} = \frac{\frac{1}{Dm} PV_{x_0}}{\frac{K + DB + D^2 m}{Dm\,(K+DB)}} = \frac{K + DB}{D^2 m + DB + K} PV_{x_0}$$

$$p^2 m + pB + K = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4mK}}{2m}$$

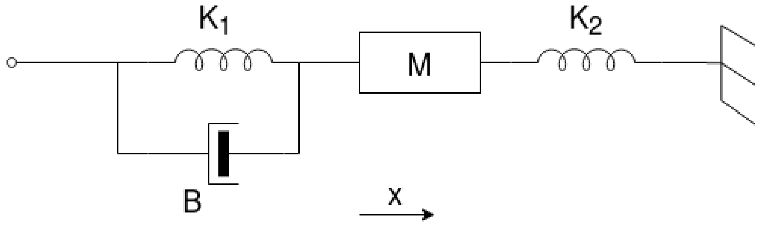
$$p_{1,2} \in R \implies B^2 - 4mK \geqslant 0 \implies B \geqslant 2\sqrt{mK}$$

Zadatak 4:

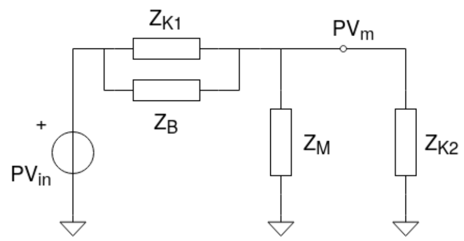
Mehanički sistem prikazan je na slici. Levi kraj se pomera po prostoperiodičnom zakonu $\Delta x = sin(\omega t)$. Opruge su krutosti $K_1 = 2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}$ i $K_2 = 5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}$. Prigušivač ima koeficijent viskoznog trenja $B = 1\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$, a telo je mase $M = 1\,\mathrm{kg}$.

a) Nacrtati ekvivalentno električno kolo.

b) Ako je učestanost prostoperiodične pobude 5 Hz, naći za koji fazni ugao kasni ili prednjači u odnosu na pobudu oscilovanja tela mase M u ustaljenom stanju.

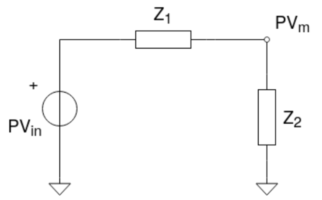


PV - pomeraj, FV - sila



$$Z_{K_1} = \frac{1}{K_1} \qquad K_B = \frac{1}{DB}$$

$$Z_M = \frac{1}{MD^2} \qquad Z_{K_2} = \frac{1}{K_2}$$



$$PV_m = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot PV_{in}$$

$$Z_1 = \frac{\frac{1}{K_1} \cdot \frac{1}{DB}}{\frac{1}{K_1} + \frac{1}{DB}} = \frac{1}{DB + K_1}$$

$$Z_1 = \frac{\frac{1}{MD_2} \cdot \frac{1}{K_2}}{\frac{1}{MD^2} + \frac{1}{K_2}} = \frac{1}{K_2 + MD^2}$$

$$PV_m = \frac{\dfrac{1}{K_2 + MD^2}}{\dfrac{1}{K_2 + MD^2} + \dfrac{1}{DB + K_1}} \cdot PV_{in} = \frac{\dfrac{1}{K_2 + MD^2}}{\dfrac{DB + K_1 + K_2 + MD^2}{(K_2 + MD^2)\,(DB + K_1)}} \cdot PV_{in} =$$

$$= \frac{DB + K_1}{D^2M + DB + K_2 + K_2} \cdot PV_{in}$$

Po analogiji sa Laplasovom transformacijom, odnosno prostoperiodičnim režimom, imamo da je:

$$D \to j\omega$$

$$PV_m = \frac{j\omega B + K_1}{K_1 + K_2 - \omega^2 M + j\omega B} \cdot PV_{in}$$

Fazna razlika jednaka je argumentu na određenoj učestanosti (ovde 5 Hz).

$$\varphi(\omega) = arg\,(Z_{ukupno}) = arctg\frac{\omega B}{K_1} - arctg\frac{\omega B}{K_1 + K_2 - \omega^2 M}$$

$$\varphi(2\pi \cdot 5) = arctg\frac{2\pi \cdot 5 \cdot 1}{200} - arctg\frac{2\pi \cdot 5 \cdot 1}{200 + 500 - (2\pi \cdot 5)^2 \cdot 1} = 8.92 - (-6.24) = 15.16^\circ$$

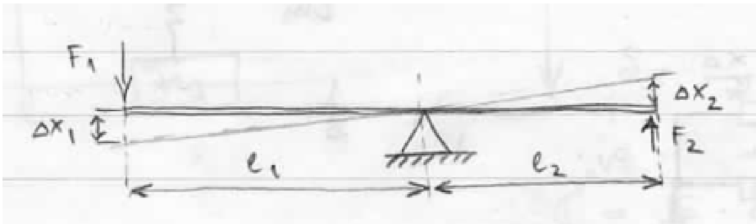
Zadatak 5:

Na slici je predstavljen mehanički sistem koji se sastoji od ravne grede (zanemarive mase) dužine L oslonjene na rastojanju aL od jednog kraja ($0 \leqslant a \leqslant L$), mase m na jednom i opruge krutosti K na drugom kraju. Uticaj gravitacije ne razmatrati. Odrediti:

a) frekvenciju oscilovanja sistema kada je izveden iz ravnoteže i prepušten samom sebi, a amplitude oscilacija su male,

b) na kom rastojanju od kraja ($a =$?) treba postaviti oslonac, da bi učestanost oscilovanja bila $2\,\mathrm{Hz}$ ako znamo $m = 30\,\mathrm{kg}$, $K = 1200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

DIGRESIJA 1 - Greda sa osloncem - poluga.



za male otklone možemo primetiti sličnost trouglova:

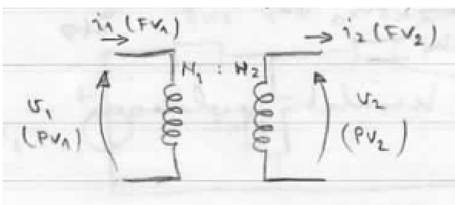
$$\frac{l_1}{\Delta x_1} = \frac{l_2}{\Delta x_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

momenti sile u osloncu na tačku oslonca

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

na osnovu ta dva: $$\boxed{\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{l_1}{l_2}}$$

DIGRESIJA 2 - Transformator (idealni).



$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= nV_2 \\ ni_1 &= i_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{i_2}{i_1} = n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{PV_1}{PV_2} = \frac{FV_2}{FV_1}$$

ZAKLJUČAK 1

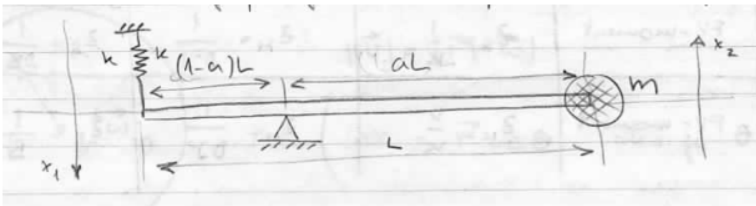
Ako postavimo

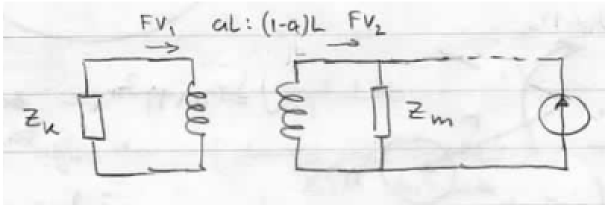
$$PV_1 \Longleftrightarrow \Delta x_1 \quad , \quad PV_2 \Longleftrightarrow \Delta x_2$$

$$FV_1 \Longleftrightarrow F_1 \quad , \quad FV_2 \Longleftrightarrow F_2$$

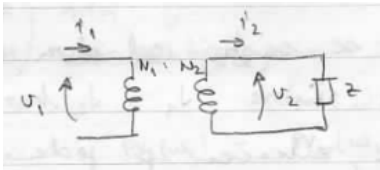
polugu možemo modelovati transformatorom ako je $\boxed{n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{l_1}{l_2}}$

Dakle, desni i levi kraj poluge ćemo povezati transformatorom.



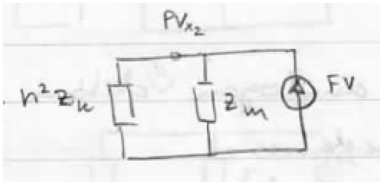


DIGRESIJA 3 - Prebacimo sve na sekundar



$$Z = \frac{V_2}{i_2}$$

$$Z' = \frac{V_1}{i_1} = \frac{nV_2}{i_2} \cdot n = n^2 Z$$



$$PV_{x_2} = FV \cdot (n^2 Z_K \parallel Z_m)$$

$$PV_{x_2} = FV \cdot \left(\frac{n^2 \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{D^2 m}}{n^2 \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{D^2 m}} \right) = \frac{\frac{n^2}{D^2 mK}}{\frac{n^2 D^2 m + K}{D^2 mK}} \cdot FV = \frac{n^2}{n^2 D^2 m + K} \cdot FV$$

Karakteristični polinom:

$$p^2 n^2 m + K = 0$$

$$p^2 = -\frac{K}{n^2 m} \qquad p = \pm j \frac{1}{n}\sqrt{\frac{K}{m}} = 0 \pm j\beta$$

$$\beta = \omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{2\pi n}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$n = \frac{l_1}{l_2} = \frac{aL}{(1-a)L} = \frac{a}{1-a} \implies f = \frac{1-a}{2\pi a}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$a \cdot f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} - a\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \implies a\left(f + \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}\right) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \implies a = \frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}}{f + \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}} = 0.33$$

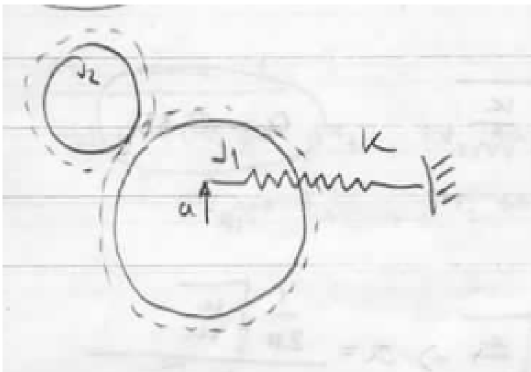
Zadatak 6:

Na slici je predstavljen sistem koji se sastoji od dva nazubljena zupčanika. Njihovi momenti inercije iznose J_1 i J_2 kao što je obeleženo na slici. Na veći zupčanik, zakačen je jedan kraj opruge i to na udaljenosti a od centra. Drugi kraj opruge je fiksiran. Krutost opruge je K. Odnos broja zupčanika je $\frac{N_1}{N_2} = \frac{7}{4}$.

a) Nacrtati električni sistem analogan datom mehaničkom i odrediti odgovarajuće impedanse.

b) Naći sopstvenu frekvenciju oscilovanja sistema.

DIGRESIJA 1



$$obim_1 : obim_2 = N_1 : N_2$$

Broj obrtaja:

$$n_1 : n_2 = obim_2 : obim_1$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Snage:

$$P_1 = \omega_1 M_1$$

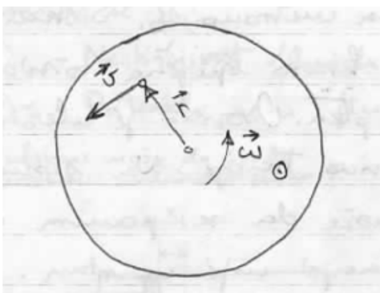
$$P_2 = \omega_2 M_2$$

$$P_1 = P_2$$

$$\omega_1 M_1 = \omega_2 M_2$$

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

DIGRESIJA 2

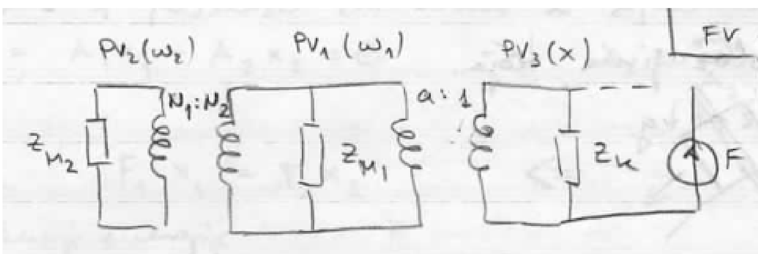


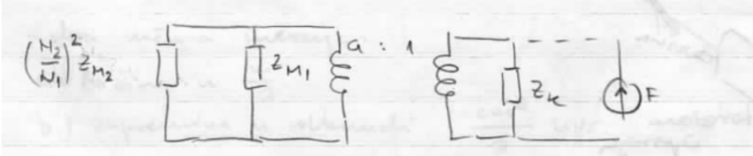
$$|\vec{V}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{\omega}|$$

$\Delta x = \vec{r} \cdot \Delta\Theta$ ako je Θ malo

$PV \rightarrow \Theta$ ugao
x položaj

$FV \rightarrow F$ sila
M moment sile





$$\hat{a}^2 \left(\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 Z_{M_2} \parallel Z_{M_1} \right) \parallel Z_k$$