



УНИВЕРЗИТЕТ
У НОВОМ САДУ



ФАКУЛТЕТ
ТЕХНИЧКИХ НАУКА

Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад, Југославија
Деканат: 021 350-413; 021 450-810; Централна: 021 350-122
Рачуноводство: 021 58-220; Студентска служба: 021 350-763
Телефакс: 021 58-133; e-mail: ftndeap@uns.ns.ac.yu



Сертифициван
систем
квалитета



Zadaci iz predmeta

МЕХАТРОНИКА

- Elektromehaničke analogije -

Septembar 2020.

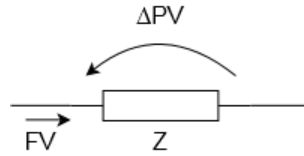
Sadržaj

1	Uopštene elektromehaničke analogije	1
1.1	Translatorni mehanički sistemi	1
1.2	Rotacioni sistemi	3
1.3	Upotreba idealnog transformatora	3
2	Zadaci sa elektromehaničkim analogijama	4
2.1	Ispitni zadatak br 2	7

1 Uopštene elektromehaničke analogije

Za primenu neophodno je uvođenje **operatora** diferenciranja - oznaka će biti **D**, a primenjivaće se množenjem sa izrazom koji se diferencira.

Pojam impedanse



$$Z = \frac{\Delta PV}{FV}$$

PV - promenljiva potencijala

FV - promenljiva toka

Pri primeni uopštenih elektromehaničkih analogija ovim hipotetičkim promenljivama (PV i FV) se pridružuju prave fizičke veličine koje učestvuju u problemu koji se rešava.

1.1 Translatorni mehanički sistemi

Opruga:

$$F = -K \cdot \Delta x \quad (1)$$

Ako usvojimo da je **PV** pomeraj - **x**, a **FV** sila - **F**:

$$FV = K \cdot \Delta PV \quad (2)$$

$$\Delta PV = \frac{FV}{K} \quad (3)$$

$$Z_K = \frac{\Delta PV}{FV} = \frac{FV}{K \cdot FV} = \frac{1}{K} \quad (4)$$

Ako pak usvojimo da je PV' brzina - $\frac{dx}{dt}$, imaćemo da je $PV' = D \cdot PV$ (D je operator diferenciranja).

$$\Delta PV' = D \frac{FV}{K} \quad (5)$$

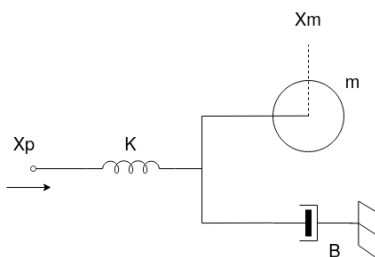
$$Z'_K = \frac{\Delta PV'}{FV} = \quad (6)$$

$$Z_K = \frac{\Delta PV}{FV} = \frac{FV}{K \cdot FV} = \frac{1}{K} \quad (7)$$

Istim rezonovanjem dolazimo do zaključka i za ostale elemente:

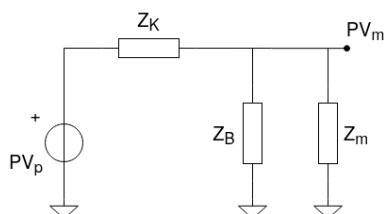
	masa	opruga	amortizer
položaj	$Z_m = \frac{1}{D^2 m}$	$Z_K = \frac{1}{K}$	$Z_B = \frac{1}{DB}$
brzina	$Z_m = \frac{1}{Dm}$	$Z_K = \frac{D}{K}$	$Z_B = \frac{1}{B}$

Primer 1:



PV_p - pobudni pomeraaj, PV_m - pomeraaj mase.

Sve možemo da nacrtamo kao ekvivalentno (analogno) električno kolo koristeći impedanse. Impedansa koja predstavlja masu, jednim krajem je uvek na fiksnom potencijalu - masi.



Rešavamo za PV_m kao i svako električno kolo sa impedansama. U suštini, sve je potpuno isto kao pri rešavanju električnih kola u prinudnom režimu.

$$PV_m = \frac{Z_B \parallel Z_m}{Z_B \parallel Z_m + Z_K} \cdot PV_p \quad (8)$$

$$Z_B \parallel Z_m = \frac{\frac{1}{DB} \cdot \frac{1}{D^2m}}{\frac{1}{DB} + \frac{1}{D^2m}} = \frac{\frac{1}{DB \cdot D^2m}}{\frac{Dm + B}{D^2Bm}} = \frac{1}{D(Dm + B)} \quad (9)$$

Prenosna funkcija:

$$\frac{PV_m}{PV_p} = \frac{\frac{1}{D(Dm + B)}}{\frac{1}{D(Dm + B)} + \frac{1}{K}} = \frac{\frac{1}{D(Dm + B)}}{\frac{K + D^2m + DB}{D(Dm + B)K}} = \frac{K}{D^2m + DB + K} \quad (10)$$

Diferencijalna jednačina koja daje rešenje za $x_m(t)$:

$$m \frac{d^2x_p}{dt^2} + B \frac{dx_p}{dt} + K \cdot x_p = K \cdot x_p(t) \quad (11)$$

Prenosna funkcija se često koristi za utvrđivanje karakteristične jednačine sistema koja se dobija zamenom D u imeniocu sa p i rešavanjem jednačine koja se dobije izjednačavanjem imenioca sa 0:

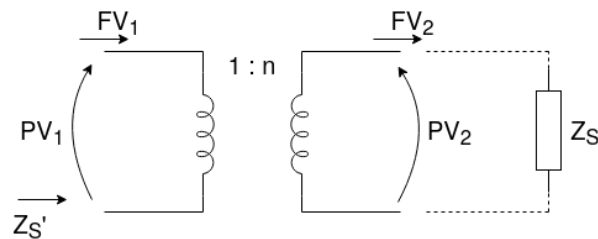
$$p^2m + pB + K = 0 \quad (12)$$

Rešavanje ove jednačine po p daće polove sistema.

1.2 Rotacioni sistemi

	moment inercije	torziona opruga	rotacioni amortizer
ugao	$Z_m = \frac{1}{D^2 J}$	$Z_K = \frac{1}{K}$	$Z_B = \frac{1}{DB}$
ugaouna brzina	$Z_m = \frac{1}{DJ}$	$Z_K = \frac{D}{K}$	$Z_B = \frac{1}{B}$

1.3 Upotreba idealnog transformatora



$$PV_2 = nPV_1$$

$$FV_1 = nFV_2$$

Impedansa zakačena na sekundar gledana sa primarne strane se može izračunati kao:

$$Z'_S = \frac{PV_1}{FV_1} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{PV_2}{FV_2} = \frac{Z_s}{n^2}$$

Transformator se često koristi za:

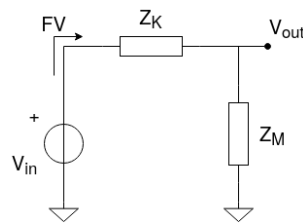
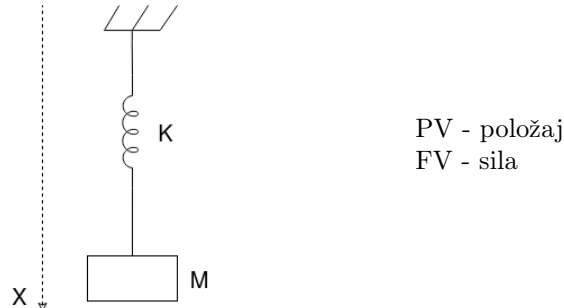
- rešavanje sistema gde je deo translatoran, a deo rotacioni
- rešavanje reduktora/multiplikatora
- rešavanje poluga

U ovim sistemima se jedna koordinata transformiše u drugu (PV), a sile se istovremeno transformišu u obrnutoj razmeri.

2 Zadaci sa elektromehaničkim analogijama

Zadatak 1:

Izračunati frekvenciju oscilovanja tereta koji visi na užetu. Masa užeta je zanemarljiva $k = 0$ DC komponenta, pa se slobodno može zanemariti. $M = 50$ kg, $K = 2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$



$$Z_K = \frac{1}{K} \quad Z_M = \frac{1}{MD^2}$$

$$FV = \frac{PV_{in}}{Z_K + Z_M} = \frac{PV_{in}}{\frac{1}{K} + \frac{1}{MD^2}} = \frac{D^2 MK}{MD^2 + K} PV_{in}$$

$$PV_{out} = Z_M \cdot FV = \frac{1}{MD^2} \frac{MD^2 K}{MD^2 + K} PV_{in}$$

$$\frac{PV_{out}}{PV_{in}} = \frac{K}{K + MD^2}$$

U obliku diferencijalne jednačine:

$$PV_{out} \cdot (K + MD^2) = K \cdot PV_{in}$$

$$K \cdot PV_{out} + MD^2 \cdot PV_{out} = K \cdot PV_{in}$$

$$MD^2 \cdot PV_{out} + K \cdot PV_{out} = K \cdot PV_{in}$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} PV_{out} + K \cdot PV_{out} = K \cdot PV_{in}$$

Odavde možemo izvući karakteristični polinom:

$$Mk^2 + k = 0$$

$$k^2 = -\frac{K}{M} \quad k = \pm j \sqrt{\frac{K}{M}} = 0 \pm j\beta$$

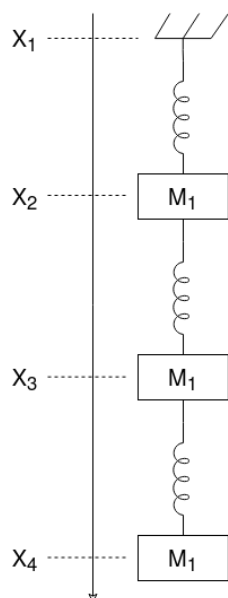
$$\alpha = 0$$

$$\beta = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{2000}{50}} = 6.32 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \omega$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1.006 \text{ Hz}$$

Zadatak 2:

Isti taj zadatak uraditi ako uže nije bez mase. Masa tereta i elastičnog užeta je ista, ali uže ima masu od $2 \frac{\text{kg}}{\text{m}} = m'$. Dužina užeta je $L = 9 \text{ m}$.



$$M_1 = \frac{L}{3} \cdot m' = 6 \text{ kg}$$

$$M_2 = \frac{L}{3} \cdot m' = 6 \text{ kg}$$

$$M_3 = \frac{L}{3} \cdot m' + M = 56 \text{ kg}$$

Hukov zakon:

$$\sigma = \frac{F}{A} - \text{poprečni napon}$$

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} - \text{rel. izduženje}$$

$$\sigma = E \cdot \delta$$

$$\Delta x = \delta x = \frac{\sigma}{E} x = \frac{F}{A \cdot E} x$$

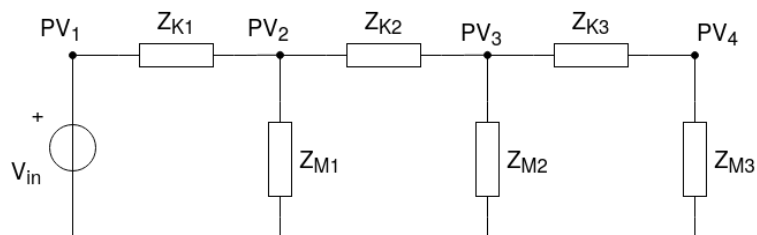
$$\Delta x = \frac{F}{\frac{A \cdot E}{x}} \quad F = \frac{A \cdot E}{L} \Delta x$$

Otuda je:

$$K_1 = K_2 = K_3 = \frac{\Delta E}{L} = 3 \cdot K_{staro} =$$

$$= 3 \cdot 2000 = 6000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Šema:



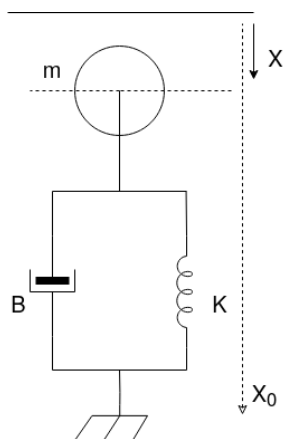
Dobijamo složeniju jednačinu iz koje slede frekvencije viših **modova** oscilovanja.

$3 \times D^2 \rightarrow$ jednačina 6. reda \rightarrow 3 frekvencije oscilovanja.

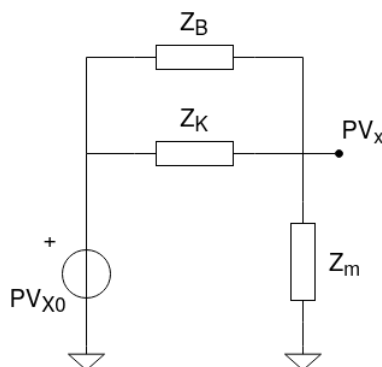
Zadatak 3:

Na slici je prikazan mehanički sistem sastavljen od opruge krutosti K , kugle mase m i amortizera koeficijenta prigušenja B .

- Nacrtati analogno električno kolo.
- Pomoću njega, odrediti minimalnu vrednost B tako da sistem nema oscilatorno ponašanje.



$$\left. \begin{array}{l} PV \rightarrow \text{brzina} \\ FV \rightarrow \text{sila} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} Z_K = \frac{D}{K} \\ Z_m = \frac{1}{Dm} \\ Z_B = \frac{1}{B} \end{array}$$



$$PV_x = \frac{Z_m}{Z_m + Z_B \parallel Z_K} PV_{x_0} = \frac{\frac{1}{Dm} PV_{x_0}}{\frac{1}{Dm} + \frac{1}{\frac{B}{D} + \frac{K}{D}}} = \frac{\frac{1}{Dm} PV_{x_0}}{\frac{1}{Dm} + \frac{D}{BK}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{Dm} PV_{x_0}}{\frac{1}{Dm} + \frac{D}{K + DB}} = \frac{\frac{1}{Dm} PV_{x_0}}{\frac{K + DB + D^2m}{Dm(K + DB)}} = \frac{K + DB}{D^2m + DB + K} PV_{x_0}$$

$$p^2m + pB + K = 0$$

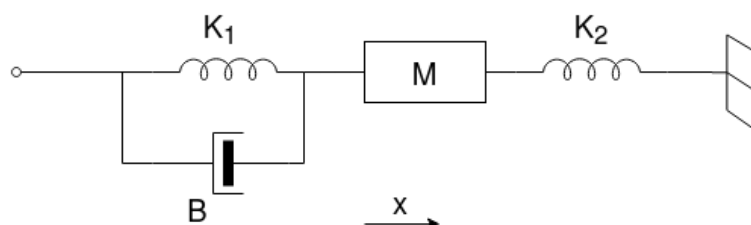
$$p_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4mK}}{2m}$$

$$p_{1,2} \in \mathbb{R} \implies B^2 - 4mK \geq 0 \implies B \geq 2\sqrt{mK}$$

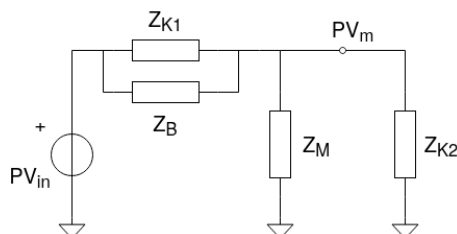
2.1 Ispitni zadatak br 2

Mehanički sistem prikazan je na slici. Levi kraj se pomera po prostoperiodičnom zakonu $\Delta x = \sin(\omega t)$. Opruge su krutosti $K_1 = 2 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ i $K_2 = 5 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Prigušivač ima koeficijent viskoznog trenja $B = 1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$, a telo je mase $M = 1 \text{ kg}$.

- Nacrtati ekvivalentno električno kolo.
- Ako je učestanost prostoperiodične pobude 5 Hz, naći za koji fazni ugao kasni ili prednjači u odnosu na pobudu oscilovanja tela mase M u ustaljenom stanju.

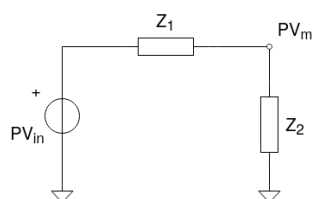


PV - pomeraj, FV - sila



$$Z_{K_1} = \frac{1}{K_1} \quad K_B = \frac{1}{DB}$$

$$Z_M = \frac{1}{MD^2} \quad Z_{K_2} = \frac{1}{K_2}$$



$$PV_m = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot PV_{in}$$

$$Z_1 = \frac{\frac{1}{K_1} \cdot \frac{1}{DB}}{\frac{1}{K_1} + \frac{1}{DB}} = \frac{1}{DB + K_1}$$

$$Z_1 = \frac{\frac{1}{MD^2} \cdot \frac{1}{K_2}}{\frac{1}{MD^2} + \frac{1}{K_2}} = \frac{1}{K_2 + MD^2}$$

$$\begin{aligned}
PV_m &= \frac{\frac{1}{K_2 + MD^2}}{\frac{1}{K_2 + MD^2} + \frac{1}{DB + K_1}} \cdot PV_{in} = \frac{\frac{1}{K_2 + MD^2}}{\frac{DB + K_1 + K_2 + MD^2}{(K_2 + MD^2)(DB + K_1)}} \cdot PV_{in} = \\
&= \frac{DB + K_1}{D^2M + DB + K_2 + K_2} \cdot PV_{in}
\end{aligned}$$

Po analogiji sa Laplasovom transformacijom, odnosno prostoperiodičnim režimom, imamo da je:

$$D \rightarrow j\omega$$

$$PV_m = \frac{j\omega B + K_1}{K_1 + K_2 - \omega^2 M + j\omega B} \cdot PV_{in}$$

Fazna razlika jednaka je argumentu na određenoj učestanosti (ovde 5 Hz).

$$\varphi(\omega) = \arg(Z_{ukupno}) = \arctg \frac{\omega B}{K_1} - \arctg \frac{\omega B}{K_1 + K_2 - \omega^2 M}$$

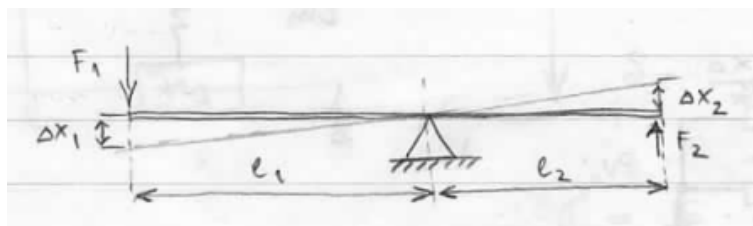
$$\varphi(2\pi \cdot 5) = \arctg \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 1}{200} - \arctg \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 1}{200 + 500 - (2\pi \cdot 5)^2 \cdot 1} = 8.92 - (-6.24) = 15.16^\circ$$

Zadatak 4:

Na slici je predstavljen mehanički sistem koji se sastoji od ravne grede (zanemarive mase) dužine L oslonjene na rastojanju aL od jednog kraja ($0 \leq a \leq L$), mase m na jednom i opruge krutosti K na drugom kraju. Uticaj gravitacije ne razmatrati. Odrediti:

- frekvenciju oscilovanja sistema kada je izveden iz ravnoteže i prepušten samom sebi, a amplitude oscilacija su male,
- na kom rastojanju od kraja ($a = ?$) treba postaviti oslonac, da bi učestanost oscilovanja bila 2 Hz ako znamo $m = 30 \text{ kg}$, $K = 1200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

DIGRESIJA 1 - Greda sa osloncem - poluga.



za male otklone možemo primetiti sličnost trouglova:

$$\frac{l_1}{\Delta x_1} = \frac{l_2}{\Delta x_2} \implies \frac{l_1}{l_2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

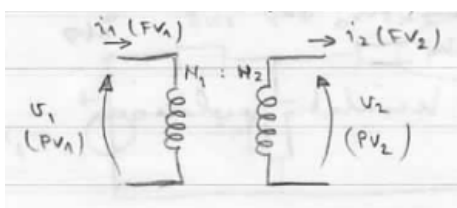
momenti sile u osloncu na tačku oslonca

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \implies \frac{l_1}{l_2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

na osnovu ta dva:

$$\boxed{\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{l_1}{l_2}}$$

DIGRESIJA 2 - Transformator (idealni).



$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = nV_2 \\ ni_1 = i_2 \end{array} \right\} \implies \frac{V_1}{V_2} = \frac{i_2}{i_1} = n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{PV_1}{PV_2} = \frac{FV_2}{FV_1}$$

ZAKLJUČAK 1

Ako postavimo

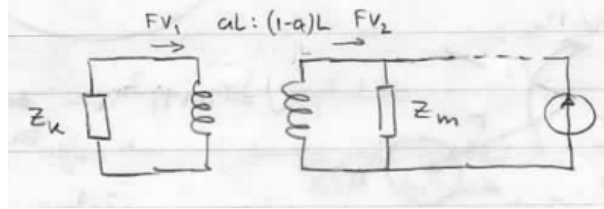
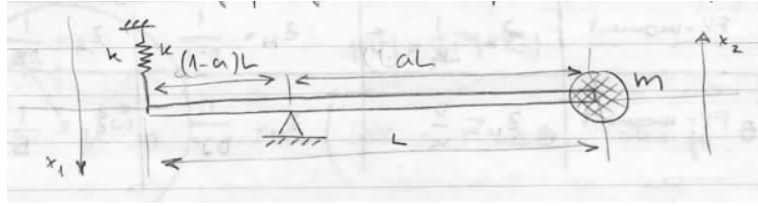
$$PV_1 \iff \Delta x_1, \quad PV_2 \iff \Delta x_2$$

$$FV_1 \iff F_1, \quad FV_2 \iff F_2$$

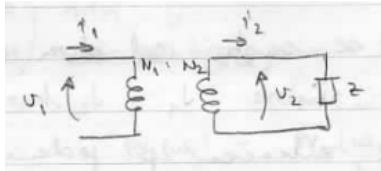
polugu možemo modelovati transformatorom ako je

$$\boxed{n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{l_1}{l_2}}$$

Dakle, desni i levi kraj poluge ćemo povezati transformatorom.

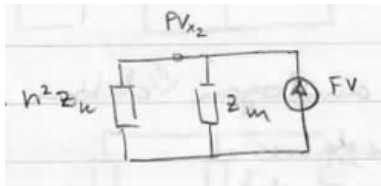


DIGRESIJA 3 - Prebacimo sve na sekundar



$$Z = \frac{V_2}{i_2}$$

$$Z' = \frac{V_1}{i_1} = \frac{nV_2}{i_2} \cdot n = n^2 Z$$



$$PV_{x_2} = FV \cdot (n^2 Z_K \parallel Z_m)$$

$$PV_{x_2} = FV \cdot \left(\frac{n^2 \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{D^2 m}}{n^2 \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{D^2 m}} \right) = \frac{\frac{n^2}{D^2 m K}}{\frac{n^2 D^2 m + K}{D^2 m K}} \cdot FV = \frac{n^2}{n^2 D^2 m + K} \cdot FV$$

Karakteristični polinom:

$$p^2 n^2 m + K = 0$$

$$p^2 = -\frac{K}{n^2 m} \quad p = \pm j \frac{1}{n} \sqrt{\frac{K}{m}} = 0 \pm j\beta$$

$$\beta = \omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{2\pi n} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$n = \frac{l_1}{l_2} = \frac{aL}{(1-a)L} = \frac{a}{1-a} \implies f = \frac{1-a}{2\pi a} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

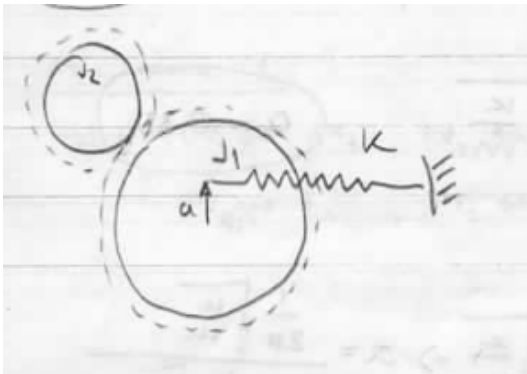
$$a \cdot f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} - a \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \implies a \left(f + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \implies a = \frac{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}}{f + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}} = 0.33$$

Zadatak 5:

Na slici je predstavljen sistem koji se sastoji od dva nazubljena zupčanika. Njihovi momenti inercije iznose J_1 i J_2 kao što je obeleženo na slici. Na veći zupčanik, zakačen je jedan kraj opruge i to na udaljenosti a od centra. Drugi kraj opruge je fiksiran. Krutost opruge je K . Odnos broja zupčanika je $\frac{N_1}{N_2} = \frac{7}{4}$.

- Nacrtati električni sistem analogan datom mehaničkom i odrediti odgovarajuće impedanse.
- Naći sopstvenu frekvenciju oscilovanja sistema.

DIGRESIJA 1



$$obim_1 : obim_2 = N_1 : N_2$$

Broj obrtaja:

$$n_1 : n_2 = obim_2 : obim_1$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Snage:

$$P_1 = \omega_1 M_1$$

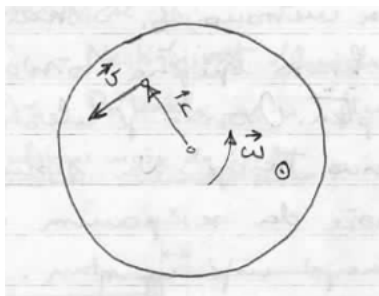
$$P_2 = \omega_2 M_2$$

$$P_1 = P_2$$

$$\omega_1 M_1 = \omega_2 M_2$$

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

DIGRESIJA 2



$$|\vec{V}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{\omega}|$$

$$\Delta x = \vec{r} \cdot \Delta\Theta \quad \text{ako je } \Theta \text{ malo}$$

$PV \rightarrow \Theta$ ugao
 x položaj

$FV \rightarrow F$ sila
 M moment sile

