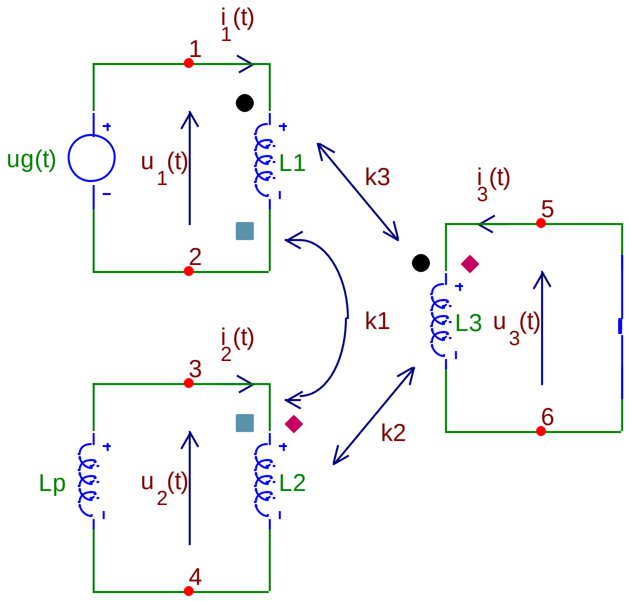
KURS TEORIJA ELEKTRIČNIH KOLA
RAČUNARSKA VEŽBA BROJ 4: LINEARNA VREMENSKI NEPROMENLJIVA (LVN) RLC KOLA U PRINUDNOM PROSTOPERIODIČNOM REŽIMU
Novi Sad 2021.

PRIPREMA ZA VEŽBU 4

1. U LVN RLC kolu zadatom na Slici 1 vlada ustaljeni prostoperiodični režim pod dejstvom generatora $u_g(t) = U_{gm}\cos(\omega t)$. Parametri kola U_{gm}, ω i L su poznati, pozitivni i konačni, a u kolu važi da je $L_1=L$, $L_2=2L$, $L_3=3L$, $L_p=2L$, $k_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $k_2=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $k_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Rešavajući zadatak u Matlab-u,

a) napišite jednačine kola u kompleksnom domenu,
b) odredite kompleksne efektivne predstavnike struja $i_1(t)$, $i_2(t)$ i $i_3(t)$, u oznaci $\underline{I}_1$=?, $\underline{I}_2$=?, $\underline{I}_3$=?,
c) odredite prinudni odziv za sve tri struje, $i_{1\,prinudno}(t)$=?, $i_{2\,prinudno}(t)$=? i $i_{3\,prinudno}(t)$=?,
d) izračunajte aktivnu i reaktivnu snagu nezavisnog naponskog generatora, P_g=?, Q_g=?,
e) ako je L=100mH, U_{gm}=1V, $\omega=2\pi f$, f=10KHz izračunajte maksimalne vrednosti svih struja, I_{1max}=?, I_{2max}=? i I_{3max}=? .



Slika 1.

REŠENJE:

a) Jednačine kola u kompleksnom domenu glase:

KR:
$$\begin{cases} \underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega k_1\sqrt{L_1L_2}\,\underline{I}_2 + j\omega k_3\sqrt{L_1L_3}\,\underline{I}_3 \\ \underline{U}_2 = -j\omega k_1\sqrt{L_1L_2}\,\underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega k_2\sqrt{L_2L_3}\,\underline{I}_3 \\ \underline{U}_3 = j\omega k_3\sqrt{L_1L_3}\,\underline{I}_1 + j\omega k_2\sqrt{L_2L_3}\,\underline{I}_2 + j\omega L_3 \underline{I}_3 \end{cases}$$

NKZ+KR+SKZ: $\underline{U}_2 = j\omega L_p(-\underline{I}_2)$

NKZ+KR: $\underline{U}_3 = 0$, $\underline{U}_g = \underline{U}_1$

b) Matlab može da rešava i sisteme simboličkih jednačina, u kojima su parametri i promenljive kompleksni brojevi ili kompleksne simboličke promenljive. Da bi program uspešno razrešio ovakve sisteme jednačina, potrebno je na početku definisati sve *realne i pozitivne* simboličke promenljive koje se pojavljuju korišćenjem naredbe `syms ... positive`. U ovom zadatku,

```
>> syms t w k1 k2 k3 Lp L1 L2 L3 L Ugm positive
```

Zatim je potrebno definisati veze među parametrima i konkretne zadate vrednosti, što u ovom primeru glasi

```
>> k1 = 1/sqrt(2); k2 = 1/sqrt(6); k3 = 1/sqrt(3);
>> L1=L; L2=2*L; L3=3*L; Lp=2*L;
```

Dodatno, potrebno je definisati i sve promenljive koje se koriste u zadatku kao i sf koja će biti objašnjena u nastavku, kod nas su to

```
>> syms U1_ U2_ U3_ I1_ I2_ I3_ sf
```

Takođe je potrebno definisati signal nezavisnog naponskog generatora,

```
>> ug = Ugm*cos(w*t)
```

Kompleksni efektivni predstavnik $\underline{Ug}$ napona $u_g(t)$ računamo preko

$$\underline{U}_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{T} \int_0^T u_g(t) e^{-j\omega t} dt$$

uz $\omega T=2\pi$, čime dobijamo $\underline{Ug}=U_{gm}/\sqrt{2}$. U Matlab-u ovo izračunavamo korišćenjem naredbe **`int(podint_f-ja, prom_po_kojoj_se_integrali, donja_gr, gornja_gr)`**

```
>> Ug_=1/sqrt(2)*w/pi*int(ug*exp(-i*w*t), t, 0, 2*pi/w)
```

U prinudnom prostoperiodičnom režimu ćemo se držati sledeće konvencije za oznake signala u Matlab-u:

- **"a..."** (prvo slovo imena promenljive je malo slovo) je oznaka za signal u vremenskom domenu koji je vremenski promenljiv, $a(t)$;
- **"A..."** (prvo slovo imena promenljive je veliko slovo, i ime se ne završava donjom crtom, _) je realna konstantna vrednost, npr. U_{gmax}, I_1 (u Matlabu, **Ugmax, I1**) itd.
- **"A..._"** (počinje sa velikim slovom i zavrsava se sa "underscore"), je kompleksni predstavnik za "*a*...", npr. $u(t)\leftrightarrow\underline{U}$, $i_3(t)\leftrightarrow\underline{I}_3$ (u Matlab-u, **u**↔**U_, i3**↔**I3_**);

Nakon definisanja svih promenljivih koje će se koristiti u rešavanju, i računanja kompleksnog predstavnika za $u_g(t)$, možemo uneti jednačine kola u Matlab. U jednačinama ćemo imaginarnu konstantu ($j\omega$) držati grupisano kao $\underline{s}_f$, $\underline{s}_f=j\omega$, zato što pre izračunavanja kompleksnih predstavnika za struje koje se traže u ovom zadatku, moramo proveriti da li u kolu možda postoji kompleksna rezonancija (tj. da li je $P(\underline{s}_f)\neq 0$, da bi mogli njime da delimo):

```
>> % tablo (sf = j*w, drzi ga u tom obliku (grupisano) do kraja)
>> % NKZ+KR+SKZ
>> eq1=U1_==sf*L1*I1_-sf*k1*sqrt(L1*L2)*I2_+sf*k3*sqrt(L1*L3)*I3_;
>> eq2=U2_==-sf*k1*sqrt(L1*L2)*I1_+sf*L2*I2_+sf*k2*sqrt(L2*L3)*I3_;
>> eq3=U3_==sf*k3*sqrt(L1*L3)*I1_+sf*k2*sqrt(L2*L3)*I2_+sf*L3*I3_;
>> % NKZ+KR+SKZ
>> eq4 = U2_ == sf*Lp*(-I2_);
>> % NKZ+KR
>> eq5 = U3_ == 0;
```

```
>> eq6 = Ug_ == U1_;
>> % resenje sistema jednačina:
>> resenje=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,'U1_,U2_,U3_,I1_,I2_,I3_')
```

U ovom trenutku Matlab još uvek „ne zna“ da li deli sa nulom ili ne, zato što mu nije prosleđena veza $\underline{s}_f = j\omega$, niti vrednosti za k_1, k_2, k_3, L_1, L_2, L_3, L_p i $\underline{U}_g$. Karakteristični polinom izdvajamo korišćenjem naredbe **numden** (skraćeno od numerator-denumerator), koja vraća brojilac i imenilac nekog simboličkog racionalnog izraza. Imenilac u rešenjima za $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ i $\underline{I}_3$ je karakteristični polinom $P(\underline{s}_f)$:

```
>> [n1,d1] = numden(resenje.I1_)
>> [n2,d2] = numden(resenje.I2_)
>> [n3,d3] = numden(resenje.I3_)
```

Promenljive **d1**, **d2** i **d3** su iste (zašto?), i u njima se nalazi izraz za karakteristični polinom. Tek sada zamenjujemo potrebne vrednosti u $P(\underline{s}_f)$ (a to su $\underline{s}_f = j\omega$, kao i k_1, k_2, k_3, L_1, L_2, L_3, L_p). Globalna definicija ovih simboličkih promenljivih *ne vrši zamenu u ranije izračunatim* izrazima, već to moramo sami učiniti, (npr. korišćenjem naredbe **subs** (substitute, zameni), ili **eval** (evaluate, izračunaj)):

```
>> sf=i*w % globalno uvodi vezu izmedju sf i i*w...
>> P3_od_sf_za_i1=simplify(eval(d1)) % i menja u izrazu za d1
>> P3_od_sf_za_i2= simplify(eval(d2)) % d2
>> P3_od_sf_za_i3= simplify(eval(d3)) % i d3 .
```

Budući da je dobijeno $P_3(j\omega) = -2j\omega L^3 \neq 0$ (zato što je $-2\neq 0$, $j \neq 0$, $\omega\neq 0$ po uslovi zadatka, $L\neq 0$ po uslovu zadatka), to znači da možemo deliti sa $P_3(j\omega)$ i vratiti se nazad u t-domen. Prinudni odzivi za sve tri struje su u istoj klasi signala kao i pobuda, tj. prostoperiodični. Na isti način na koji smo u $P_3(j\omega)$ zamenili $\underline{s}_f$, k_1, k_2, k_3, L_1, L_2, L_3, L_p, to vršimo i ovde (uz zamenu i $\underline{U}_g$), korišćenjem naredbe **eval:**

```
>> resenje.I1_ = simplify(eval(resenje.I1_))
>> resenje.I2_ = simplify(eval(resenje.I2_))
>> resenje.I3_ = simplify(eval(resenje.I3_))
```

c) Povratak nazad u t-domen (određivanje prinudnih odziva za tri struje) vršimo preko $a_{prinudno}(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left\{\underline{A}_{eff} e^{j\omega t}\right\}$, što u Matlab-u postižemo korišćenjem naredbi

```
>> i1_prinudno=simplify(real(rewrite(sqrt(2)*resenje.I1_*exp(sf*t),'sincos')))
>> i2_prinudno=simplify(real(rewrite(sqrt(2)*resenje.I2_*exp(sf*t),'sincos')))
>> i3_prinudno=simplify(real(rewrite(sqrt(2)*resenje.I3_*exp(sf*t),'sincos')))
```

Ove naredbe vrše sledeća izračunavanja:

1. Množi se odgovarajući efektivni kompleksni predstavnik **resenje.Ix_** sa **exp(sf*t)**,
2. Potrebno je prebaciti sve eksponencijalne funkcije sa kompeksnim eksponentom u sinuse i kosinuse (exp -> sin, cos), korišćenjem Ojler-ovog obrazca. U Matlab-u, ovo se postiže korišćenjem naredbe **rewrite(sta da konvertuje, 'sincos').**
3. Izdvaja se realni deo izraza (neredba "**...real()...**");
4. Množi sa sa korenom iz 2 ("**...sqrt(2)*...**")
5. Uprošćava se izraz na kraju, ako je to moguće ("**...simplify()...**")

Na ovaj način smo dobili simbolička rešenja za prinudne odzive za tri struje, koji iznose

```
i1_prinudno=11/2*Ugm*sin(w*t)/L/w,
i2_prinudno=2*Ugm*sin(w*t)/L/w,
i3_prinudno=-5/2*Ugm*sin(w*t)/L/w.
```

d) Aktivnu i reaktivnu snagu generatora računamo po definicionim izrazima za snage u prostoperiodičnom režimu, $P_g=\mathrm{Re}\{\underline{U}_g \underline{I}_g^*\}$, $Q_g=\mathrm{Im}\{\underline{U}_g \underline{I}_g^*\}$ (ovde voditi računa da su kod nezavisnih i zavisnih generatora, podrazumevani smerovi struje i napona na pristupu *neusaglašeni*, a kod svih ostalih elemenata usaglašeni). U Matlab-u, ove naredbe glase

```
>> Pg = eval(real(Ug_*conj(resenje.I1_)))
>> Qg = simplify(eval(imag(Ug_*conj(resenje.I1_))))
```

Za aktivnu snagu na generatoru dobijamo **`Pg=0`**, što se može proveriti i bez izračunavanja (u kolu nema elemenata na kojima se disipira aktivna snaga, tj. kolo je bez omovskih otpornika), a za reaktivnu snagu **`Qg=11/4*Ugm^2/L/w`**.

e) Iz rešenja u simboličkom obliku možemo lako izračunati numerička rešenja, ako su dati konkretni brojni podaci za parametre kola. Ovo postižemo korišćenjem naredbe **`subs`** (zameni). U ovom zadatku,

```
>> L=100*10^-3 %100mH
>> Ugm=1 %1V
>> f=10*10^3 %10KHz
>> w=2*pi*f %rad/s
>> %efektivni kompleksni predstavnici sa zamenjenim numerickim vrednostima
>> I1_eff_=subs(resenje.I1_)
>> I2_eff_=subs(resenje.I2_)
>> I3_eff_=subs(resenje.I3_)
>> % maksimalne vrednosti struja
>> I1max=sqrt(2)*abs(I1_eff_)
>> I2max=sqrt(2)*abs(I2_eff_)
>> I3max=sqrt(2)*abs(I3_eff_)
```

Ovim dobijamo vrednosti I_{1max} =0.87535 mA, I_{2max} =0.31831 mA i I_{3max} = 0.39789 mA. U gornjim izrazima se koristi naredba **`abs`**, koja primenjena na kompleksan broj ili kompleksnu simboličku promenljivu vraća njihov moduo ($\underline{a}=a_r+ja_i$, abs($\underline{a}$)=sqrt($a_r^2+a_i^2$)).