Формалне методе пројектовања и верификације хардвера

Вук Врањковић

Факултет техничких наука, Нови Сад

bykbpa@gmail.com

28. decembar 2016

Преглед

Булове функције

- Булова функција је пресликавање: $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$
- Коначан скуп Булових променљивих означићемо са V
- Израчунавање Булове функције је мапирање које се добија када се промнљиве замене конкретним вредностима.
- Израчунавањем Булове функције добија се вредност 1 или 0
- Булова функција је таутологија уколико за сва израчунавања даје вредност 1
- Булова функција је задовољива уколико бар за једно израчунавање даје вредност 1
- Представљање Булових функција
    - Таблице
    - Логичке формуле
    - Графови

Таблица

- Једна функција $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ је представљена таблично
- $V = \{x_1, x_2, x_3\}$

	x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
$\mathcal{I}_0$	F	F	F	F
$\mathcal{I}_1$	F	F	T	T
$\mathcal{I}_2$	F	T	F	T
$\mathcal{I}_3$	F	T	T	F
$\mathcal{I}_4$	T	F	F	T
$\mathcal{I}_5$	T	F	T	T
$\mathcal{I}_6$	T	T	F	T
$\mathcal{I}_7$	T	T	T	T

Ефикасност

- Функција са n промењљивих има 2^n врста
- Свакој врсти се може додлити једна од две вредности
- Колико различитих Булових функција се може направити?

Редуковане таблице

	x_1	x_2	x_3
$\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_5$	-	F	T
$\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_6$	-	T	F
$\mathcal{I}_4$, $\mathcal{I}_5$, $\mathcal{I}_6$, $\mathcal{I}_7$	T	-	-

Логичке формуле #1

- Дефиниција (формула): За задати скуп атомичних формула (промењљивих) $x_i \in V$ и симбола $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ формул се индуктивно дефинишу на следећи начин:
    - Све атомичне формул се формуле
    - Ако си a и b формуле тада су и $a \wedge b$, $a \vee b$ формуле
    - Ако је a формула, тада је и $\neg a$ формула
- Уводе се и уобичајене скраћенице за импликацију, еквиваленцију
- Дефиниција (supp): Скуп промењљивих који су саставни делови формуле a записују се са $supp(a)$
- $supp((x_1 \wedge x_2) \vee \neg x_4) = \{x_1, x_2, x_4\}$

Логичке формуле #2

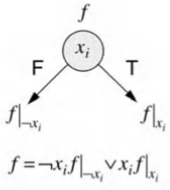
- Представљање Булових функција логичким формулама је обично компактније од употребе таблица
- Кобиновање Булових функција је знатно лакше када се користе формуле
- Ипак, одређивање да ли је функција записана формулом валидна или задовољива је тешко
- Теорема: Одређивање задовољибости задате функције је NP комплетан проблем
- Теорема: Одређивање валидности (таутологија) је co-NP комплетан проблем

Прећење таблица и формула

- Предности таблица
  - Једноставно израчунавање вредности
  - Имају нормалну форму, што једноставну проверу еквивалентности
- Предности формула
  - Компактна репрезентација формула

Графови, бинарни дијаграми одлука

- Основа бинарних дијаграма одлука Binary Decision Diagram (BDD) је Шенонова експанзиона теорема која се ослања на кофакторе
- Дефиниција (кофактор): $f(x_1, ..., x_i = 1, ..., x_n)$ се зове кофактором функције f у односу на променљиву x_i и записује се $f|x_i$
  $f(x_1, ..., x_i = 1, ..., x_n)$ се зове кофактором функције f у односу на променљиву $\neg x_i$ и записује се $f|\neg x_i$
- Шенонова теорема: $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = (x_i \wedge f|x_i) \vee (\neg x_i \wedge f|\neg x_i)$

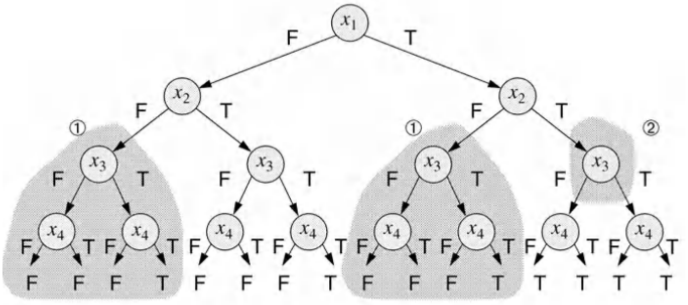


Задатак

- Задатак: Урадити Шенонову експанзију за функцију $f = x_1 x_2 x_3 + \neg x_1 \neg x_2$ по променљивој x_1
- Задатак: Урадити Шенонову експанзију за функцију $f = x_1 x_2 + x_3 x_4$ по свим променљивим и нацртати резултујуће стабло

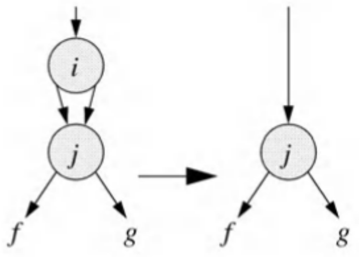
Решење

- $f = x_1(x_2 x_3) + \neg x_1(\neg x_3)$



Редукција стабла

- Уколико се употреби следећа редукција на стаблу може се добити знатно једноставније стабло



- Упрошћено стабло добијено на овај начин назива се Reduced Ordered Binary Decision Diagram (ROBDD)

ROBDD синтакса

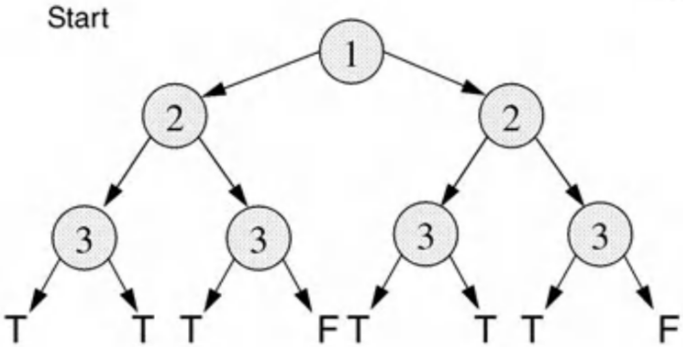
- Дефиниција синтаксе: ROBDD са n прменљивих је директни ациклични граф $G := (V, E)$. Сваки чвор графа $v \in V$ је или међучвор или лист. Сваки међучвор има два наследника $left : V \to V$ и $right : V \to V$ и означен је индексном вредношћу $index : V \to \{1, ..., n\}$. Сваки лист има вредност $val : V \to \mathbb{B}$. Функција $var : \{1, ..., n\} \to V$ пресликава вредност индекса на променљиву из V. Граф је уређен што значи: $index(v) < index(left(v))$ и $index(v) > index(right(v))$. Гране графа су дате као парови $(v, left(v))$ и $(v, right(v))$
- Величина ROBDD у ознаци $|G|$ једнака је броју чворова графа

ROBDD семантика

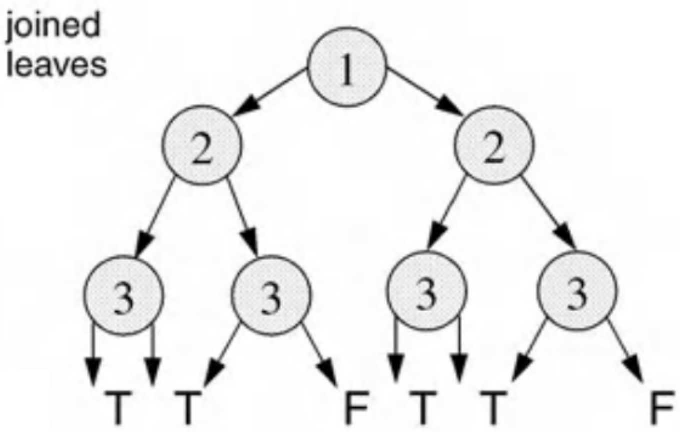
- Дефиниција семантике: Сваки ROBDD са кореном $v \in V$ рекурзивно дефинише Булову функцију f на следећи начин:

$$f := \begin{cases} F, v \in leafs, val(v) = F \\ T, v \in leafs, val(v) = T \\ \neg var(index(v)) \wedge f(left(v)) \vee var(index(v)) \wedge f(right(v)), v \in nodes \end{cases}$$

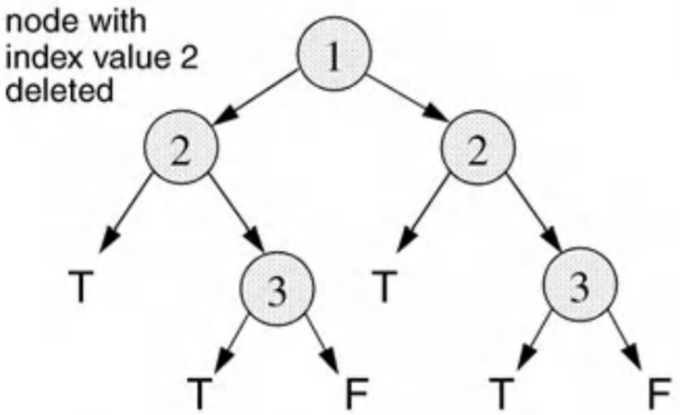
Пример редукције BDD у ROBDD



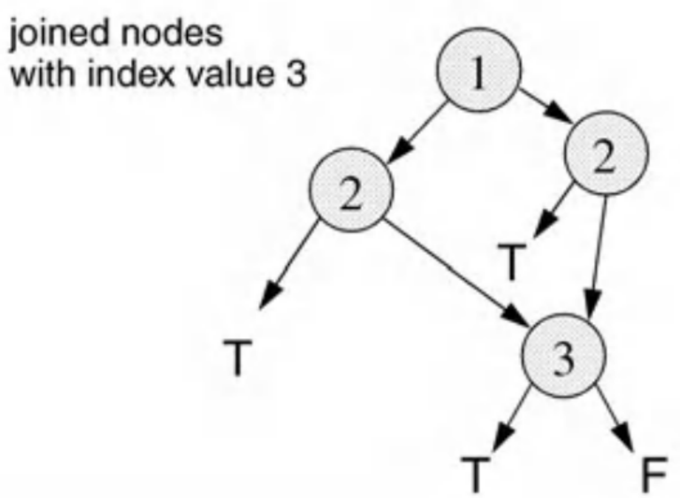
Пример редукције BDD у ROBDD



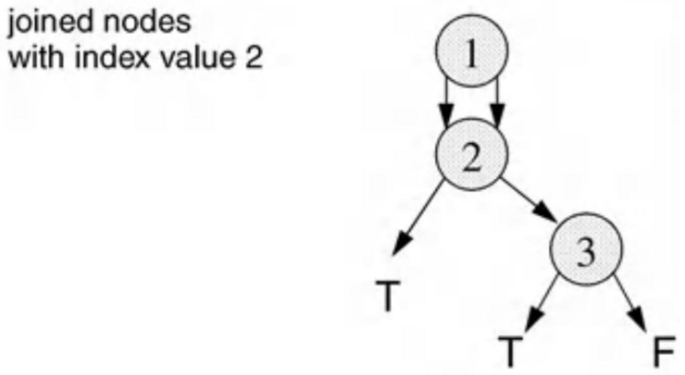
Пример редукције BDD у ROBDD



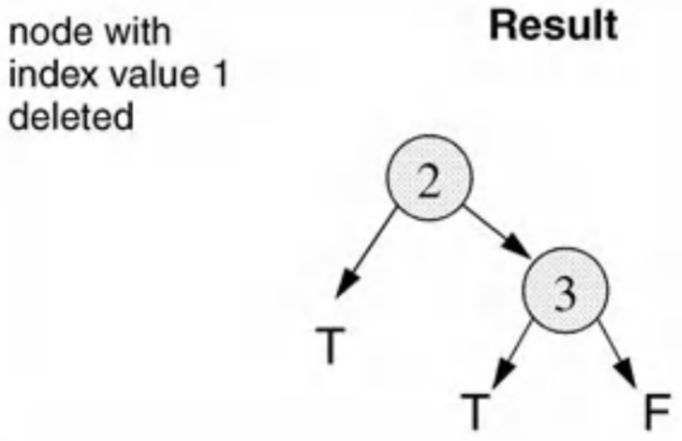
Пример редукције BDD у ROBDD



Пример редукције BDD у ROBDD



Пример редукције BDD у ROBDD



Задатак

- Направити ROBDD за функцију $f = x_1x_2 + x_3x_4$ за редослед променљивих: 1, 2, 3, 4

Решење