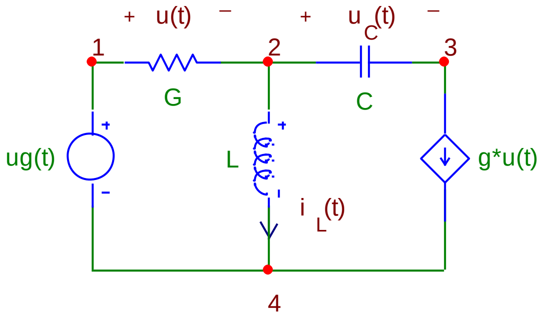
KURS TEORIJA ELEKTRIČNIH KOLA
RAČUNARSKE VEŽBE BROJ 2: LINEARNA VREMENSKI NEPROMENLJIVA (LVN) RLC KOLA U VREMENSKOM DOMENU
Novi Sad 2020.

PRIPREMA ZA VEŽBU 2

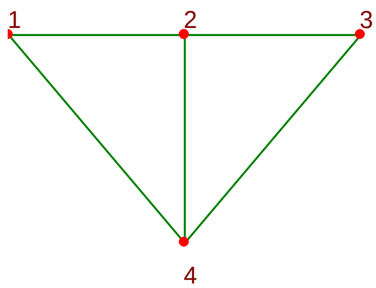
1. U LVN RLC kolu zadatom na Slici 1, parametri kola U, T, G i C su poznati, pozitivni i konačni, paramentar g je poznat i pozitivan uz $g<G$, a važi $L=\dfrac{T}{G-g}$. Signal nezavisnog naponskog izvora je $u_g(t)=Ue^{-\frac{t}{T}}$, a početni uslovi u kolu su $u_C(0)=0$ i $i_L(0)=-(G-g)U$.
   a) Nacrtajte graf pridružen kolu, strujni i naponski graf potrebne za određivanje napona $u(t)$,
   b) formirajte redukovani tablo diferencijalnih jednačina potrebnih za određivanje napona $u(t)$,
   c) formirajte model kola u prostoru stanja, tj. postavite jednačine stanja i izlaznu jednačinu (u skalarnoj i matričnoj formi) za određivanje napona $u(t)$,
   d) rešite jednačine stanja i odredite napon $u(t)$ korišćenjem simboličkog računa u Matlab-u,
   e) iz matrica **A**, **B**, **CC** i **D** dobijenih pod c), korišćenjem Kejli-Hamiltonove teoreme izvedite relaciju ulaz-izlaz (RUI) za napon $u(t)$ u Matlab-u, kao i potrebne početne uslove, $u(0)$ i $\dfrac{du}{dt}(0)$,
   f) rešite RUI za $u(t)$ u Matlabu (potvrdite rezultat dobijen pod tačkom d).



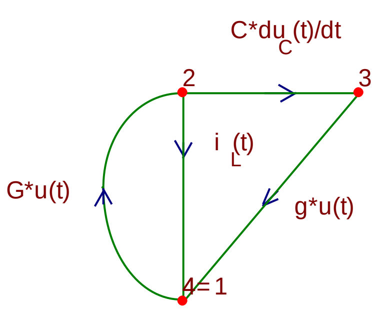
Slika 1.

REŠENJE:

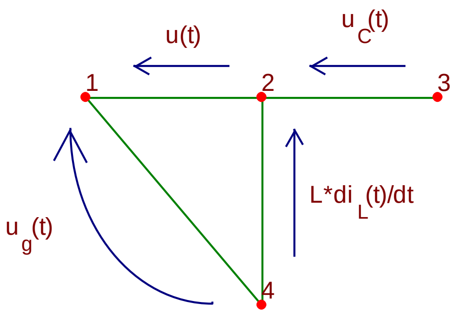
a) Graf pridružen kolu i odgovarajući strujni i naponski grafovi su prikazani na Slikama 1a, 1b i 1c. Struje i naponi koji nisu zadati postavkom zadatka su uvedeni i orijentisani na odgovarajućim grafovima, vodeći računa o usaglašenosti napona i struje na svakom pristupu.



Slika 1a. Graf kola



Slika 1b. Strujni graf



Slika 1c. Naponski graf

b) Graf pridružen kolu ima 5 grana, tj. dimenzije maksimalnog skupa jednačina su 10x10. Strujni graf ima 3 čvora, tj. u redukovanom skupu jednačina je dovoljno postaviti 2 SKZ+KR. Naponski graf ima 1 okce, tj. potrebno je napisati 1 NKZ+KR. Ukoliko SKZ+KR napišemo npr. za snopove oko čvorova 2 i 3 (svi snopovi orijentisani npr. ka spolja), i konturu za NKZ+KR obiđemo u pravcu kretanja kazaljki na satu), redukovani tablo jednačina glasi:

$$\text{SKZ+KR: } \begin{cases} -Gu(t)+i_L(t)+C\dfrac{du_c(t)}{dt}=0 \\ -C\dfrac{du_C(t)}{dt}+gu(t)=0 \end{cases} \qquad \text{NKZ+KR: } \left\{ u_g(t)-u(t)-L\dfrac{di_L(t)}{dt}=0 \right. \quad .$$

Redukovani tablo jednačina ima 3 jednačine i 3 nepoznate promenljive, $\{u, i_L, u_C\}$.

c) Za promenljive stanja biramo napone kondenzatora i struje kalema (koliko ih ima u kolu). U ovom kolu nema degeneracija početnih uslova, pa su promenljive stanja $u_C(t)$ i $i_L(t)$. Kako je po uslovu zadatka $g>0$, iz druge jednačine po SKZ+KR možemo izraziti napon $u(t)$,

$$u(t)=\frac{C}{g}\frac{du_C(t)}{dt} \tag{1}$$

i zameniti ga u preostale dve jednačine, odakle dobijamo jednačine polustanja (sistem diferencijalnih jednačina prvog reda, gde su na levim stranama jednačina linearne kombinacije prvih izvoda promenljivih stanja, a na desnim stranama jednačina linearne kombinacije promenljivih stanja i nezavisnih generatora):

$$\begin{cases} C\left(1-\dfrac{G}{g}\right)\dfrac{du_c(t)}{dt}=-i_L(t) \\ -\dfrac{C}{g}\dfrac{du_C(t)}{dt}-L\dfrac{di_L(t)}{dt}=-u_g(t) \end{cases} \quad . \tag{2}$$

Jednačine polustanja treba još prevesti u normalnu Košijevu formu (na levim stranama diferencijalnih jednačina je po jedan prvi izvod promenljivih stanja), odakle dobijamo

$$\begin{cases} \dfrac{du_c(t)}{dt}=0u_C(t)+\dfrac{g}{(G-g)C}i_L(t) \\ \dfrac{di_L(t)}{dt}=0u_C(t)-\dfrac{1}{L(G-g)}i_L(t)+\dfrac{1}{L}u_g(t) \end{cases} \quad , \tag{3}$$

ili napisano u matričnoj formi,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_c(t)}{dt} \\ \dfrac{di_L(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{g}{(G-g)C} \\ 0 & -\dfrac{1}{L(G-g)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{2\times2}} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{2\times1}} \left[u_g(t)\right] \quad . \tag{4}$$

Jednačine (3) ili (4) nazivamo *jednačine stanja. Izlaznu jednačinu* za odabrane izlaze (ovde samo napon $u(t)$) dobijamo zamenom prve jednačine sistema (3) u (1),

$$u(t)=\frac{1}{(G-g)}i_L(t) \quad , \tag{5}$$

ili u matričnoj formi,

$$[u(t)] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{(G-g)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{CC}_{1\mathrm{x}2}} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{\mathbf{D}_{1\mathrm{x}1}} [u_g(t)] \quad . \tag{6}$$

U opštem slučaju, izlaze treba izraziti u funkciji promenljivih stanja i nezavisnih generatora.

d) Da bismo rešili redukovani tablo simboličkih j-na u Matlab-u, potrebno je definisati sve simboličke promenljive koje se pojavljuju (uključujući i vreme *t*), korišćenjem naredbe **`syms`**. Promenljive koje će se diferencirati, potrebno je zadati da budu tipa **`symfun`**, odnosno unutar zagrade napisati promenljivu od koje zavisi (po kojoj diferenciramo). Naredba **`syms`** će ovako izgledati

```
>> syms U T G C L g ug uc(t) u iL(t) t
```

Zatim je potrebno ukucati jednačine stanja, gde za prvi izvod neke promenljive koristimo operator diferenciranja, u oznaci **`D`** (imena promenljivih koje će se pojavljivati *unutar naredbe* **`dsolve`** ne smeju počinjati velikim slovom D!). U jednačine stanja treba zameniti i vrednosti za u_g i *L*, ($u_g(t) = Ue^{-\frac{t}{T}}, L = \dfrac{T}{G-g}$), što daje

```
>> js1=Duc==g/((G-g)*C)*iL;
js2=DiL==-1/T*iL+(U*exp(-t/T))/(T/(G-g));
```

Takođe je potrebno definisati početne uslove,

```
>> pu1=uc(0)==0; pu2=iL(0)==-(G-g)*U;
```

Sistem simboličkih diferencijalnih jednačina rešavamo korišćenjem naredbe **`dsolve`**, u kojoj navodimo redom jednačine stanja i početne uslove potrebne za njihovo rešavanje,

```
>> resenje=dsolve(js1,js2,pu1,pu2)
```

Rešenjima za $i_L(t)$i $u_C(t)$ u strukturi **`resenje`** pristupamo preko

```
>> resenje.iL
>> resenje.uc
```

Rešenja se mogu pojednostaviti korišćenjem naredbe **`simplify`**,

```
>> resenje.iL=simplify(resenje.iL)
>> resenje.uc=simplify(resenje.uc)
```

Na kraju, rešenje zadatka (napon $u(t)$) dobijamo iz izlazne jednačine (5),

```
>> u=1/(G-g)*resenje.iL
>> u=simplify(u)
```

Što daje kao rešenje zadatka pod d)

```
u =

exp(-t/T)*(t-T)*U/T
```

e) Matrice **A B CC** i **D**, koje opisuju kolo u prostoru stanja su izvedene pod tačkom c. Da bismo izveli RUI za napon $u(t)$ korišćenjem Kejli-Hamiltonove teoreme, potrebno je prvo definisati 4 matrice,

```
>> A=[0 g/(C*(G-g)); 0 -1/(L*(G-g))]
>> B=[0; 1/L]
>> CC=[0 1/(G-g)]
>> D=[0]
```

Karakteristični polinom $\mathbf{P}_2(\underline{s})$ određujemo (prethodno moramo definisati novi simbol $\underline{s}$) preko

```
>> syms s
>> kar_pol=det(s*eye(2)-A)
```

$\mathbf{P}_2(\underline{s})$ možemo videti u preglednom obliku i kao polinom po $\underline{s}$ korišćenjem naredbe **`expand`** i **`pretty`**

```
>> pretty(expand(kar_pol))
```

Kako je $\mathbf{P}_2(\underline{s})=\underline{s}^2+\dfrac{L}{G-g}\underline{s}$, to znači da će leva strana matričnog izraza za određivanje RUI glasiti $\dfrac{d^2\underline{\mathbf{y}}(t)}{dt^2}+\dfrac{L}{G-g}\dfrac{d\underline{\mathbf{y}}(t)}{dt}$. Kako je u ovom zadatku $\underline{\mathbf{y}}_{1\mathrm{x}1}(t)=[u(t)]$, leva strana RUI za napon $u(t)$ će glasiti $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2}+\dfrac{L}{G-g}\dfrac{du(t)}{dt}$, odnosno (zamenjujući L), $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2}+\dfrac{1}{T}\dfrac{du(t)}{dt}$.

Pre nego što odredimo desnu stranu RUI, moramo definisati vektor promenljivih stanja $\underline{\mathbf{x}}_{2\mathrm{x}1}$, vektor $\underline{\mathbf{w}}_{1\mathrm{x}1}$ u kome se nalaze sve pobude, kao i jednačine stanja i izlaznu jednačinu:

```
>> x=[uc;iL] % promenljive stanja
>> w=[ug] % nezavisni izvori
>> Dx=A*x+B*w % jednačine stanja u matričnom obliku
>> y=CC*x+D*w % izlazna jednačina u matričnom obliku
```

Budući da je u ovom zadatku **D**=[0], prvi i drugi izvod izlazne jednačine se pojednostavljuju,

```
>> Dy=CC*Dx
>> D2y=CC*A*Dx+CC*B*diff(w)
```

U gornjoj liniji, naredba **`diff`** simbolički diferencira sve elemente vektora **w** po podrazumevanoj nezavisnoj promenljivoj *t*. Karakteristični polinom $\mathbf{P}_2(\underline{s})$ diktira linearnu kombinaciju $\underline{\mathbf{y}}$, $d\underline{\mathbf{y}}/dt$ i $d^2\underline{\mathbf{y}}/dt^2$ koju treba napraviti da bi se dobila desna strana RUI za $u(t)$, (odnosno da bi se eliminisale promenljive stanja):

```
>> D2y+1/T*Dy
>> desna_strana_RUI=subs(D2y+1/T*Dy,L,T/(G-g))
```

```
>> simplify(desna_strana_RUI)
```

Tako za desnu stranu RUI po $u(t)$ dobijamo $-\frac{U}{T^2}e^{-\frac{t}{T}}$. Još je potrebno odrediti početne uslove $u(0)$ i $\frac{du}{dt}(0)$ za RUI po $u(t)$:

```
>> uc_0=0
>> iL_0=-(G-g)*U
>> x_0=[uc_0;iL_0]
>> y_0=CC*x_0+D*subs(w,t,0)
>> Dy_0=CC*A*x_0+CC*B*subs(w,t,0)
>> simplify(y_0)
>> simplify(Dy_0)
```

čime dobijamo vrednosti za početne uslove u trenutku t=0, $u(0)= -U$ i $\frac{du}{dt}(0)=\frac{2U}{T}$. U gornjim redovima je korišćena naredba **subs(w,t,0)**, koja zamenjuje u izrazu **w** simboličku promenljivu **t** nulom, odnosno izračunava vrednost $u_g(0)$.

f) Sa određenom levom i desnom stranom RUI za $u(t)$, kao i potrebnim početnim uslovima za njeno rešavanje, može se verifikovati rešenje dobijeno pod d). Da bi Matlab uspešno rešio diferencijalnu jednačinu potrebno je da zadamo $y(t)$ kao simboličku promenljivu i odredimo Dy i D2y (syms y(t); Dy=diff(y); D2y=diff(y,2);)

```
>> res_u2=dsolve(D2y+1/T*Dy==-1/T^2*U*exp(-t/T),y(0)==-U,...
Dy(0)==2*U/T)
>> simplify(res_u2)
```

što ponovo daje isto rešenje za $u(t)$ kao i putem rešavanja jednačina stanja, $u(t)=\frac{U(t-T)}{T}e^{-\frac{t}{T}}$.