Standardne forme i minimizacija logičkih funkcija

Logičke funkcije se u praksi obično realizuju svođenjem na jednu od dve standardne forme: zbir proizvoda, ili proizvod zbirova. Pošto je pri realizaciji funkcije poželjno koristiti minimalan mogući broj logičkih kola, javlja se potreba za njihovim uprošćavanjem (minimizacijom). Funkcija zadata u nekoj od standardnih formi je pogodna za grafički postupak minimizacije pomoću Karnoovih tabela, koji će ovde biti prikazan kroz primere.

Standardne forme

Kao što je rečeno u prethodnoj vežbi, svaka logička funkcija može biti izražena na više različitih, međusobno ekvivalentnih načina. Proizvoljna logička funkcija zadata u algebarskom obliku, može se primenom zakona Bulove algebre svesti na jednu od dve standardne forme:

- **Disjunktivna normalna forma (DNF)** je zbir proizvoda u čijem formiranju učestvuju ulazne promenljive i njihove invertovane vrednosti. Primer:

$$F = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot D$$

- **Konjuktivna normalna forma (KNF)** je proizvod zbirova u čijem formiranju učestvuju ulazne promenljive i njihove invertovane vrednosti. Primer:

$$F = (A + B) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C}) \cdot (A + \overline{D})$$

Primer: Svođenje funkcije $F = \overline{A \cdot \overline{B} + \overline{C} \cdot D}$ na obe standardne forme.

$$F = \overline{A \cdot \overline{B} + \overline{C} \cdot D} = \overline{A \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{C} \cdot D} = (\overline{A} + B) \cdot (C + \overline{D})$$

Primenom De Morganovih zakona dva puta uzastopno, funkcija je svedena na standardnu formu proizvoda suma (KNF). Funkciju je u nastavku moguće svesti na drugu standardnu formu (DNF) primenom zakona distributivnosti množenja prema sabiranju:

$$F = (\overline{A} + B) \cdot (C + \overline{D}) = (\overline{A} + B) \cdot C + (\overline{A} + B) \cdot \overline{D} = \overline{A} \cdot C + B \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{D} + B \cdot \overline{D}$$

Potpune standardne forme. Prikaz funkcije tablicom istinitosti i skupom indeksa

Za standardnu formu se kaže da je potpuna (savršena), ako u formiranju proizvoda, odnosno zbirova koji je sačinjavaju učestvuju sve ulazne promenljive. Na primer, funkcija $F^1(A, B, C) = A + \overline{B} \cdot C$ predstavlja nepotpunu DNF, odnosno zbir nepotpunih proizvoda. Od ukupno 3 ulazne promenljive, u prvom (trivijalnom) proizvodu se pojavljuje samo promenljiva A, a u drugom B i C. Od nepotpune forme do potpune se dolazi postupkom proširivanja logičkih proizvoda preostalim promenljivama, što je ilustrovano primerom:

$$F = A + \overline{B} \cdot C = A \cdot (B + \overline{B}) \cdot (C + \overline{C}) + \overline{B} \cdot C \cdot (A + \overline{A}) =$$
$$A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C = A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$$

Ako se posmatra ista funkcija zadata u početnoj formi nepotpune sume proizvoda (DNF), postavlja se pitanje kako prevesti funkciju u formu proizvoda suma (KNF). Prvi način bi bio algebarskim transformacijama, pri čemu se u potrebnom broju koraka primenjuje distributivnost sabiranja prema množenju:

$$F = A + \overline{B} \cdot C = (A + \overline{B}) \cdot (A + C)$$

Dobijena je nepotpuna KNF, koju je dalje moguće svesti na potpunu formu na sličan način kao u primeru sa DNF, proširivanjem logičkih zbirova nedostajućim promenljivama:

$$F = (A + \overline{B}) \cdot (A + C) = (A + \overline{B} + C \cdot \overline{C}) \cdot (A + C + B \cdot \overline{B}) =$$
$$(A + \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) + (A + B + C) + (A + \overline{B} + C) = (A + \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (A + B + C)$$

Kada je u pitanju prelazak sa disjunktivne na konjuktivnu formu i obrnuto, prethodni primer bi možda mogao da navede na pogrešan zaključak da je algebarska transformacija jednostavna i odvija se u jednom ili dva elementarna koraka. Zapravo, ovo je tačno jedinu u slučaju kada je funkcija takva da sadrži mali broj logičkih proizvoda, odnosno zbirova. U slučaju složenije funkcije, ovakav postupak može postati prilično nezgrapan i komplikovan, pa je u tom slučaju preporučljivo okrenuti se alternativnim načinima konverzije između standardnih formi.

Jedan od alternativnih načina prevođenja funkcije iz jedne u drugu standardnu formu je pomoću kombinacione tabele (tabele istinitosti). U ovu tabelu se upisuje vrednost funkcije za svaku moguću kombinaciju ulaznih promenljivih. U prethodnom slučaju, funkcija ima 3 ulazne promenljive, pa tabela sadrži ukupno $2^3 = 8$ kombinacija. Moguće je uočiti vezu između kombinacione tabele i potpunih standardnih formi. Svaka kombinacija pri kojoj funkcija ima vrednost 1 u tabeli odgovara po jednom potpunom proizvodu, koji učestvuje u formiranju sume potpunih proizvoda. Proizvodi nastaju na sledeći način: pošto odgovaraju kombinacijama ulaznih promenljivih pri kojima je $F = 1$, promenljive koje su jednake jedinici se u proizvodu pojavljuju u neinvertovanom obliku, a promenljive koje su jednake nuli su invertovane. Primer: kombinaciji $A = 0, B = 0, C = 1$ odgovara potpuni proizvod $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$.

[1]Kada se pored oznake funkcije u zagradi navede redosled ulaznih promenljivih, podrazumeva se da je prva navedena promenljiva najviša po značaju (MSB), a poslednja najniža (LSB). U ovom slučaju, promenljiva A je MSB, a C je LSB. Pri pisanju logičkih proizvoda, odnosno zbirova, potrebno je poštovati ovakav redosled navođenja promenljivih.

indeks	A	B	C	F	proizvod/zbir
0	0	0	0	0	$A+B+C$
1	0	0	1	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
2	0	1	0	0	$A+\overline{B}+C$
3	0	1	1	0	$A+\overline{B}+\overline{C}$
4	1	0	0	1	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
5	1	0	1	1	$A\cdot\overline{B}\cdot C$
6	1	1	0	1	$A\cdot B\cdot\overline{C}$
7	1	1	1	1	$A\cdot B\cdot C$

Potpuna DNF:
$F=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot C$

Potpuna KNF:
$F=(A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})$

Nasuprot tome, formiranje proizvoda potpunih zbirova prati suprotnu logiku, po kojoj svaki zbir odgovara po jednoj kombinaciji pri kojoj je $F=0$. Iz tog razloga, promenljive koje su jednake nuli se pojavljuju u zbiru u neinvertovanom obliku, a promenljive koje su jednake jedinici bivaju invertovane. Primer: kombinaciji $A=0, B=1, C=0$ odgovara potpuni zbir $A+\overline{B}+C$.

Postoji još jedan način predstavljanja logičke funkcije koji je zgodan zbog svoje kompaktne forme. Naime, svaki potpuni proizvod (odnosno zbir) odgovara po jednoj kombinaciji ulaznih promenljivih. Svakoj od tih kombinacija je pridružen po jedan binarni broj, a decimalni ekvivalenti tih binarnih brojeva se nazivaju indeksima i prikazani su u prvoj vrsti kombinacione tabele. Svaka funkcija se može predstaviti skupom indeksa na dva načina, konkretno za funkciju iz prethodnog primera:

$F(A,B,C)=\sum(1,4,5,6,7)$ - Ovo je ekvivalent sume potpunih proizvoda. U zagradi se navode indeksi koji predstavljaju kombinacije ulaznih promenljivih za koje funkcija ima vrednost 1.

$F(A,B,C)=\prod(0,2,3)$ - Ovo je ekvivalent proizvoda potpunih suma. U zagradi se navode indeksi koji predstavljaju kombinacije ulaznih promenljivih za koje funkcija ima vrednost 0.

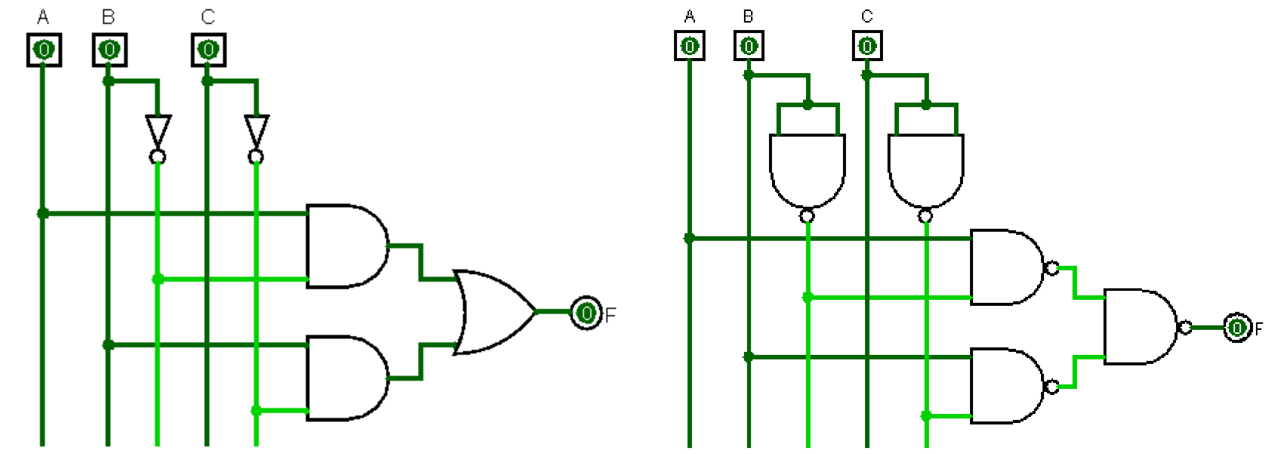
Naravno, ova dva načina predstavljanja funkcije su međusobno logički ekvivaelntna. Pri tome, važno je napomenuti da se pri predstavljanju funkcije skupom indeksa obavezno pored oznake funkcije u zagradi navodi redosled ulaznih promenljivih, kako bi veza između indeksa i kombinacija ulaznih promenljivih bila nedvosmislena.

Načini realizacije funkcija pomoću logičkih kola

U praksi, standardne forme funkcija predstavljaju polaznu osnovu za realizaciju funkcija pomoću logičkih kola. To će biti prikazano na primeru funkcije $F=A\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}$. Ovakva funkcija, zadata u obliku DNF se realizuje u standardnoj dvostepenoj[2] I-ILI logici. To znači da se u prvom stepenu logike formiraju logički proizvodi pomoću I kola, a zatim se u drugom stepenu formira zbir proizvoda pomoću jednog ILI kola koje ima onoliko ulaza koliko ima proizvoda (slika 1a).

Dvostrukom negacijom funkcije u disjunktivnoj formi, a zatim primenom De Morganovog zakona za invertovanje zbira, funkcija se prevodi u formu pogodnu za realizaciju korišćenjem NI kola, odnosno u standardnoj dvostepenoj NI-NI logici (slika 1b). Ukoliko se invertori zamenene NI kolima

[2] Invertori koji služe za dobijanje invertovanih vrednosti ulaznih promenljivih se ne smatraju posebnim stepenom logike, pa stoga stoji ovakav naziv.



(a) *Standardna dvostepena I-ILI logika* **(b)** *Standardna dvostepena NI-NI logika*

Slika 1: *Realizacije funkcije bazirane na DNF*

sa kratko spojenim ulazima, uočava se da je funkciju moguće realizovati korišćenjem samo jedne vrste logičkih kola (tj. da NI operacija sama po sebi predstavlja potpun skup logičkih operacija, pomoću koje se može realizovati bilo koja funkcija)! Slično razmatranje važi i za NILI operaciju, kao što će biti prikazano u nastavku.

$$F = \overline{\overline{A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{C}}} = \overline{\overline{A \cdot \overline{B}} \cdot \overline{B \cdot \overline{C}}}$$

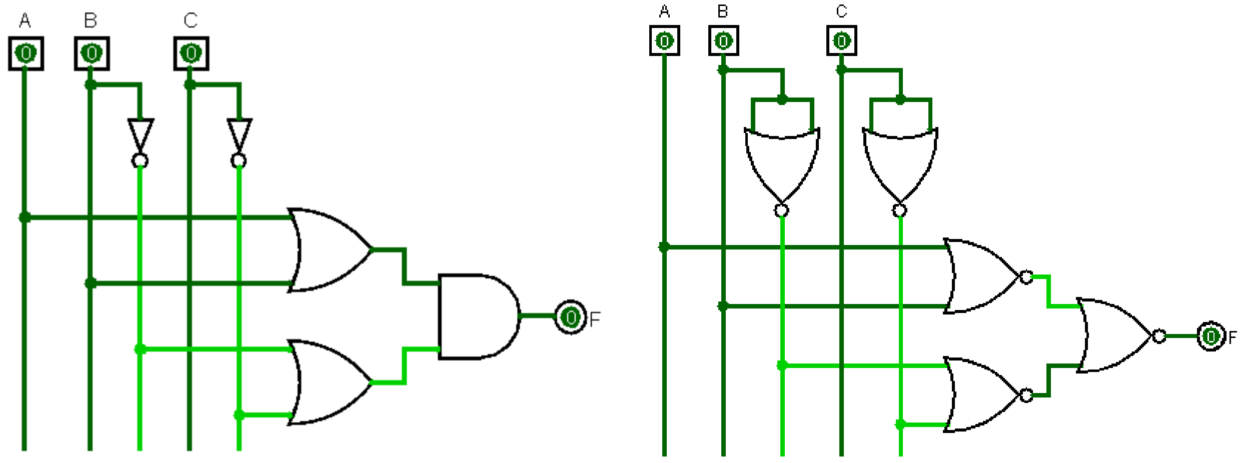
Ukoliko se ista funkcija prevede u KNF, dobija se da je $F = (A + B) \cdot (\overline{B} + \overline{C})$. Takav oblik funkcije je pogodan za realizaciju u standardnoj dvostepenoj ILI - I logici. U ovom slučaju, u prvom stepenu se formiraju logički zbirovi pomoću ILI kola, a zatim se u drugom stepenu formira njihov proizvod pomoću I kola (slika 2a).

Analogno prethodnom slučaju, polazeći od KNF, dvostrukim invertovanjem funkcije i primenom De Morganovog zakona za inverziju proizvoda, dobija se oblik funkcije pogodan za realizaciju dvostepenom NILI-NILI logikom (slika 2b):

$$F = \overline{\overline{(A + B) \cdot (\overline{B} + \overline{C})}} = \overline{\overline{A + B} + \overline{\overline{B} + \overline{C}}}$$

Minimizacija funkcija korišćenjem Karnoovih tabela

Pošto je već pokazano da svaka logička funkcija može da se nađe u više međusobno ekvivalentnih formi, postavlja se pitanje kako doći do optimalne forme koja za realizaciju zahteva minimum resursa, odnosno minimalan broj potrebnih logičkih kola. Problem svođenja logičke funkcije na optimalnu, tj. minimalnu formu naziva se minimizacijom funkcije. Postoji više metoda minimizacije, kojima je zajednička karakteristika da su zasnovani na zakonima Bulove algebre. Ovde će biti prikazana grafička metoda minimizacije funkcija kod kojih je broj promenljivih ≤ 4, korišćenjem Karnoovih tabela (Karnoovih mapa).



(a) *Standardna dvostepena ILI-I logika* **(b)** *Standardna dvostepena NILI-NILI logika*

Slika 2: *Realizacije funkcije bazirane na KNF*

Karnoova tabela je pravougaona tabela koja sadrži 2^n polja. Svako od polja odgovara po jednoj kombinaciji ulaznih promenljivih i u njega se upisuje vrednost funkcije za tu kombinaciju (0 ili 1). Minimizacija funkcije pomoću Karnoove tabele biće prikazana na primeru funkcije zadate kombinacionom tabelom:

A	B	C	D	F(A, B, C, D)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Karnoova tabela za funkciju F(A,B,C,D):

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	1	1	0	1
10	1	0	1	1

$$F = \overline{B}\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot C$$

Postupak minimizacije se odvija u 3 koraka:

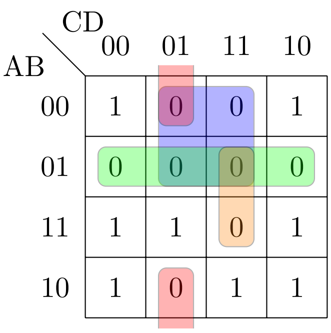
1. Vrednosti funkcije iz kombinacione tabele se upisuju u Karnoovu tabelu. Kao što je već rečeno, svako polje u tabeli odgovara po jednoj kombinaciji ulaznih promenljivih. U ovom

slučaju, vrednosti promenljivih A i B se menjaju po vertikali, a C i D po horizontali. Pri tome treba voditi računa o tome da nakon kombinacije 01 dolazi 11, a ne 10 kao što je to slučaj u prirodnom binarnom kodu. Ovakav naizgled čudan raspored polja je uslovljen potrebom da se svaka dva susedna[3] polja razlikuju u tačno jednom bitu. To je osobina u kojoj se krije suština postupka minimizacije, zahvaljujući postulatu Bulove algebre po kojem je $A+\overline{A}=1$.

2. Sve jedinice u tabeli je potrebno pokriti minimalnim brojem što je moguće većih četvorougaonih maski veličine 2^n polja (dakle, dozvoljene veličine maski su 1, 2, 4, 8, ili 16 polja). Pri tome se zahteva da sve jedinice budu pokrivene, maske ne smeju prelaziti preko nula i dozvoljeno je da se različite maske delimično preklapaju. U ovom slučaju, pokrivanje jedinica je izvršeno pomoću dve maske od po 4 polja i dve maske od po 2 polja.

3. Pošto su jedinice pokrivene maskama, minimizovana disjunktivna forma se dobija tako što se svakoj od maski pridružuje po jedan proizvod ulaznih promenljivih, na sledeći način. Promenljive koje u svim poljima maske imaju vrednost 1 će biti neinvertovane, promenljive koje imaju vrednost 0 se invertuju, a promenljive koje menjaju vrednost u okviru maske ne učestvuju u formiranju proizvoda. Primer: u masci veličine 2 polja u donjem desnom uglu tabele (obeleženoj plavom bojom), vrednosti promenljivih su $A=1, B=0, C=1$, a D se menja. Prema tome, nepotpuni proizvod koji odgovara ovoj masci je $A \cdot \overline{B} \cdot C$.

Ako je cilj minimizovati funkciju u konjuktivnoj formi, primenjuje se sličan postupak kao u prethodnom razmatranju. Razlika je u tome što se maskama pokrivaju nule u tabeli, a svaka maska se interpretira kao jedan od logičkih zbirova koji sačinjavaju konjuktivnu formu. Pri tome treba voditi računa o tome da je logika ista kao kod očitavanja potpunih zbirova iz kombinacione tabele, o čemu je bilo reči u prethodnom delu: promenljive koje su u okviru maske jednake jedinici se invertuju, promenljive koje su jednake nuli će biti neinvertovane, a promenljive koje menjaju vrednost u okviru maske se ne pojavljuju u zbiru. Primer: u masci koja prelazi preko horizontalne ivice tabele (obeleženoj crvenom bojom), vrednosti promenljivih su $B=C=0, D=1$, a A se menja. Nepotpuni zbir koji odgovara ovoj masci je $B+C+\overline{D}$.



$$F = (B+C+\overline{D}) \cdot (\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}) \cdot (A+\overline{B}) \cdot (A+\overline{D})$$

[3]Kada je pojam susednih polja u pitanju, Karnoovu tabelu treba shvatiti kao trodimenzionalnu strukturu u kojoj se naspramne ivice tabele međusobno dodiruju. To je najlakše vizualizovati tako što se zamisli npr. da se tabela deformiše u valjak, tako da se vertikalne ivice spoje, a zatim se valjak deformiše u torus, tako da se dodirnu i horizontalne ivice.

Zadatak Funkcija 4 promenljive je zadata skupom indeksa: $F(X,Y,Z,W) = \prod(4,6,7,10,12,14)$. Realizovati funkciju korišćenjem minimalnog potrebnog broja logičkih kola, u sledećim standardnim realizacijama:

a)Dvostepena I-ILI logika
b)Dvostepena NI-NI logika
c)Dvostepena ILI-I logika
d)Dvostepena NILI-NILI logika

Proveriti ekvivalenciju 4 načina realizacije simulacijom u *Logisim-u*.

Zadatak Minimizovati funkciju koju ostvaruje mreža prikazana na slici. Simulacijom proveriti da li je minimizovana funkcija logički ekvivalentna sa polaznom funkcijom.