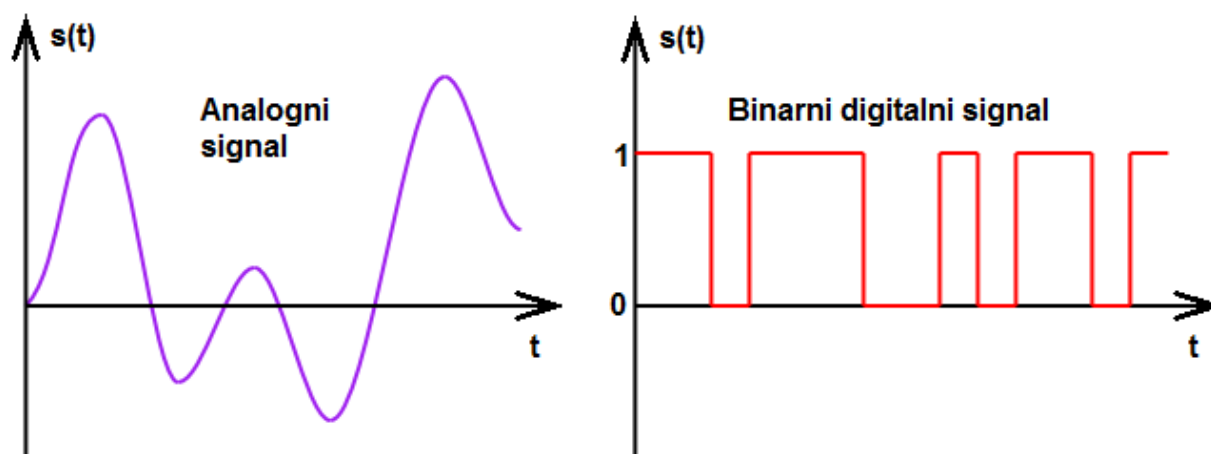


Logička kola, Bulova algebra i logičke funkcije

Ovde će biti opisani uvodni pojmovi vezani za digitalnu elektroniku. Prvo se uvodi pojam binarnih digitalnih signala. Zatim je opisana funkcionalnost logičkih kola koja obavljaju osnovne logičke operacije, manipulišući vrednostima takvih signala. Nakon pregleda osnovnih zakona Bulove algebre, kao fundamentalne oblasti matematike na kojoj se zasniva rad digitalnih sistema, dato je nekoliko primera realizacije logičkih funkcija.

Binarni digitalni signali

U elektronici, pod pojmom signala podrazumeva se električna veličina koja može da menja vrednost tokom vremena. Ta veličina je najčešće napon, a ređe se koriste i strujni signali. Kada su u pitanju elektronska kola koja se napajaju iz jednosmernog izvora napona, uobičajeno je da je opseg vrednosti naponskih signala ograničen naponom napajanja. Analogni signal je signal koji u proizvoljnom trenutku može imati bilo koju vrednost u okviru datog opsega (slika 1 levo).



Slika 1: Analogni i binarni digitalni signal

Sa druge strane, digitalni signal u svakom vremenskom trenutku može imati jednu od nekoliko unapred određenih diskretnih vrednosti. Binarni digitalni signal prikazan na slici 1 desno, tokom

vremena može imati svega dve vrednosti: visoku vrednost, koja se naziva logičkom jedinicom i nisku vrednost, koja se naziva logičkom nulom. Tačne vrednosti napona koje odgovaraju ovim logičkim nivoima određene su prvenstveno tehnologijom izrade digitalnog kola. U današnje vreme dominantna je CMOS tehnologija, u kojoj je nivo logičke jedinice jednak naponu napajanja (V_{cc}), a nivo logičke nule jednak je nultom naponu, tj. naponu negativnog kraja izvora napajanja (GND, odnosno masa). Uobičajeno je da se logički nivoi interpretiraju kao istinitosne vrednosti logičkih iskaza: $0 \Leftrightarrow$ netačno, $1 \Leftrightarrow$ tačno. Digitalni sistemi o kojima će biti reči u ovoj i narednim vežbama pojavljuje zasnivaju svoj rad isključivo na ovoj vrsti signala.

Logička kola

Logičko kolo je elektronsko kolo sa jednim ili više ulaza i jednim izlazom, koje obavlja logičku operaciju tako što na osnovu stanja signala na ulazima dovodi signal na izlazu u odgovarajuće logičko stanje. Svako od osnovnih logičkih kola ima odgovarajući šematski simbol. Ponašanje kola se opisuje kombinacionom tabelom u kojoj je za svaku moguću kombinaciju logičkih stanja na ulazima prikazano kakvo je stanje na izlazu. Pošto se binarni digitalni signali mogu naći u dva logička stanja (0 ili 1), kombinaciona tabela za kolo sa n ulaza sadrži ukupno 2^n kombinacija.

I kolo (AND)

A	B	$Y = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Slika 2: Dvoulazno I kolo

ILI kolo (OR)

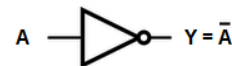
A	B	$Y = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Slika 3: Dvoulazno ILI kolo

Invertor (NOT)

A	$Y = \bar{A}$
0	1
1	0



Slika 4: Invertor

Za razliku od invertora koji obavezno ima jedan ulaz, I i ILI kolo mogu imati proizvoljan broj ulaza (minimalno 2). Pri tome, logička operacija koju obavlja višoulazno kolo predstavlja uopštenje operacije koju vrši dvoulazno kolo.

NI kolo (NAND)

A	B	$Y = \overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Slika 5: Dvoulazno NI kolo

NILI kolo (NOR)

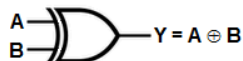
A	B	$Y = \overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



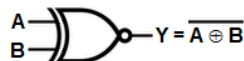
Slika 6: Dvoulazno NILI kolo

EKS-ILI kolo (XOR)

A	B	$Y = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**Slika 7: EKS-ILI kolo****EKS-NILI (XNOR)**

A	B	$Y = \overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Slika 8: EKS-NILI kolo**

“I” operacija se naziva još i logičkim množenjem, a “ILI” operacija logičkim sabiranjem. Invertovanje se obeležava nadvlačenjem signala koji se invertuje. “NI” je kombinacija logičkog množenja i invertovanja, a “NILI” kombinacija logičkog sabiranja i invertovanja. “EKS-ILI” operacija daje jedinicu kada su na ulazima različite vrednosti, a “EKS-NILI” daje jedinicu kada su na ulazima iste vrednosti. Ove dve operacije su definisane samo za slučaj kola sa dva ulaza.

Parametri logičkih kola

Za implementaciju savremenih digitalnih sistema koriste se elektronska digitalna logička kola koja su napravljena od poluprovodničkih materijala. Kod ovih logičkih kola logička 0 i logička 1 predstavljani su opsegom napona signala na ulazima odnosno izlazima.

Napon napajanja

Logičko kolo mora da ima jednosmerni napon napajanja i priključak na masu da bi moglo da obavlja svoju funkciju. Napon napajanja obično se obeležava sa V_{CC} ili V_{DD} .

Struja napajanja

U toku rada kroz logičko kolo teče struja I_{CC} (ili I_{DD}) od priključka za napajanje do mase. Ova struja se menja u toku rada kola i zato se obično navodi srednja vrednost struje pri zadatom režimu rada kola, na primer kada kolo radi na nekoj učestanosti ulaznih signala.

Disipacija

U toku rada logičko kolo troši električnu energiju koja se pretvara u toplotnu energiju i zagreva kolo. Električna energija koju kolo troši naziva se disipacija i jednaka je proizvodu napona i struje napajanja $E_D = V_{CC} I_{CC}$. Od interesa je da disipacija bude što je moguće manja kako bi se logičko kolo što manje grejalo.

Napon ulaznog signala

Napon ulaznog signala treba da bude u dozvoljenom opsegu da bi ga logičko kolo prepoznalo kao logičku 0 ili logičku 1. Obično se navodi najveća vrednost ulaznog napona V_{u0max} koju logičko kolo

prepoznaje kao logičku 0, odnosno najmanja vrednost ulaznog napona V_{u1min} koju logičko kolo prepoznaje kao logičku 1. Sve ulazne napone iz opsega $(0, V_{u0max})$ logičko kolo prepoznaje kao logičku 0, a sve ulazne napone iz opsega (V_{u1min}, V_{CC}) prepoznaje kao logičku 1.

Struja na ulazu

Kada se na ulazni priključak logičkog kola dovede signal koji je na logičkoj 1, onda na ulaznom priključku teče struja koja ima smer prema logičkom kolu. Ako je na ulaznom priključku logička 0, struja teče u suprotnom smeru. Kao parametar logičkog kola obično se navodi maksimalna vrednost I_{u0max} struje kada je na ulazu logička 0 i maksimalna vrednost I_{u1max} kada je na ulazu logička 1. Poželjno je da ulazna struja bude što je moguće manja, kako bi logičko kolo što manje opteretilo generator ulaznog signala.

Napon izlaznog signala

U normalnim uslovima rada logičko kolo na izlazu daje napon u opsegu koji predstavlja logičku 0 odnosno logičku 1. Obično se navodi najveća vrednost izlaznog napona V_{i0max} kada je na izlazu logička 0, odnosno najmanja vrednost izlaznog napona V_{i1min} kada je na izlazu logička 1. Smisao ovog parametra je da proizvođač garantuje da će u normalnim uslovima rada logičko kolo na izlazu u logičkoj 0 imati napon koji je jednak ili manji od V_{i0max} a u logičkoj 1 napon koji je jednak ili veći od V_{i1min} .

Struja na izlazu

Logičko kolo na svom izlazu može da obezbedi struju koja je u logičkoj 0 nije veća od I_{i0max} a u logičkoj 1 nije veća od I_{i1max} . Prema tome, logičko kolo na izlazu može da se optereti potrošačem (na primer ulazom nekog drugog logičkog kola) pod uslovom da struja potrebna potrošaču nije veća od I_{i0max} i I_{i1max} ako je na izlazu logička 0 i logička 1, respektivno.

Margina šuma

Margina šuma pokazuje osetljivost logičkog kola na šumove koji mogu da se pojave u toku rada logičkog kola. Margina šuma V_{M0} u logičkoj 0 i margina šuma V_{M1} u logičkoj 1 zavise od napona na izlazu i ulazu logičkog kola i računaju se za najnepovoljniji mogući slučaj:

$$V_{M0} = V_{u0max} - V_{i0max}$$

$$V_{M1} = V_{i1min} - V_{u1min}$$

Faktor grananja

Faktor grananja pokazuje koliko se logičko kolo može opteretiti (koliku struju može dati na izlazu) a da još uvek pravilno radi. Pošto se po pravilu izlaz jednog logičkog kola veže na jedan ili više ulaza drugih logičkih kola, faktori grananja F_0 (u logičkoj 0) i F_1 (u logičkoj 1) jednaki su najvećem broju ulaza koji mogu da se vežu na izlaz logičkog kola u najnepovoljnijem mogućem slučaju u logičkoj

0 i logičkoj 1, respektivno. Faktori grananja jednaki su količniku izlaznih i ulaznih struja logičkog kola:

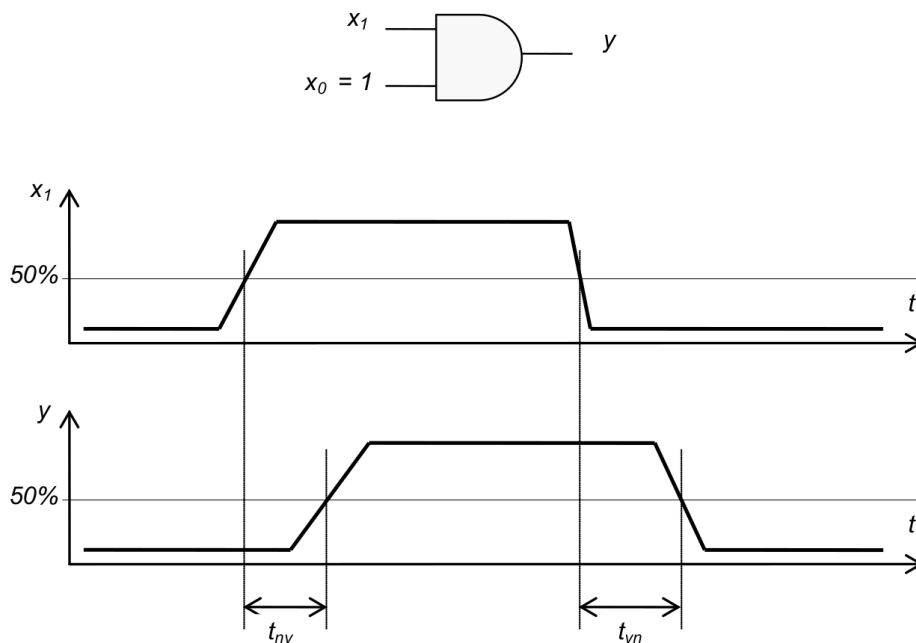
$$F_0 = \frac{I_{i0max}}{I_{u0max}}$$

$$F_1 = \frac{I_{i1max}}{I_{u1max}}$$

Za ukupni faktor grananja uzima se manja vrednost od F_0 i F_1 zaokružena na prvi manji celi broj.

Vremensko kašnjenje signala

Vremensko kašnjenje signala pokazuje brzinu odziva logičkog kola na promenu ulaznog signala. Vremensko kašnjenje meri se tako što promenimo napon signala za ulazu i merimo vreme do promene napona signala na izlazu. Na primer, kod merenja kašnjenja logičkog I kola sa dva ulaza, jedan ulaz držimo u stanju logičke 1, a signal na drugom ulazu menjamo sa niskog napona (logička 0) na visoki napon (logička 1) i zatim sa visokog napona (logička 1) na niski napon (logička 0). Promena signala sa logičke 0 na logičku 1 naziva se prednja ili uzlazna ivica, a promena sa logičke 1 na logičku 0, zadnja ili silazna ivica signala. Vremensko kašnjenje obično se meri od trenutka kada nastupi 50 % promene ulaznog signala do trenutka kada nastupi 50% promene izlaznog signala, kao što pokazuje sledeći dijagram.



Vremena kašnjenja uzlazne ivice t_{nv} i silazne ivice t_{vn} u opštem slučaju su različita i često se koristi srednje vreme kašnjenja t_k koje je jednako aritmetičkoj sredini dva različita kašnjenja:

$$t_k = \frac{t_{nv} + t_{vn}}{2}$$

Logičke funkcije i Bulova algebra

Logičke funkcije su funkcije koje se dobijaju izvođenjem i kombinovanjem osnovnih logičkih operacija nad vrednostima ulaznih signala, koje u ovom kontekstu predstavljaju logičke promenljive. Takve funkcije se obično opisuju analitičkim izrazima u kojima se pojavljuju ulazne promenljive obeležene velikim slovima abecede, konstante 0 i 1 i operacije između njih. Bulova algebra je matematička disciplina koja se bavi logičkim funkcijama i njihovim svojstvima. U nastavku su (bez dokazivanja) dati osnovni postulati Bulove algebre.

Dvostruka negacija

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Operacije sa nulom

$$0 \cdot A = 0$$

$$0 + A = A$$

Operacije sa jedinicom

$$1 \cdot A = A$$

$$1 + A = 1$$

Operacije sa istim vrednostima

$$A \cdot A = A$$

$$A + A = A$$

Operacije sa suprotnim vrednostima

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

$$A + \overline{A} = 1$$

Komutativnost

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + B = B + A$$

Asocijativnost

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Distributivnost

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

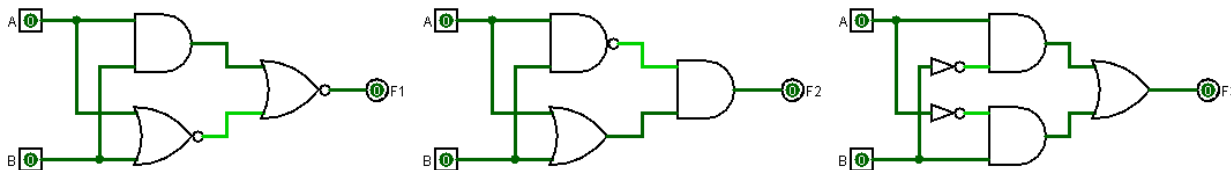
De Morganovi zakoni

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Ista logička funkcija može biti izražena na više različitih načina, odnosno različitim algebarskim izrazima. Za dve funkcije se kaže da su ekvivalentne ako i samo ako na im se vrednosti podudaraju za sve moguće kombinacije ulaznih promenljivih. Primenom zakona Bulove algebre, moguće je vršiti transformacije kojima se funkcija prevodi iz jednog u drugi (ekvivalentni) oblik.

Zadatak Za primere mreža sa logičkim kolima prikazane na slici 9 odrediti odgovarajuće algebarske izraze, a zatim ih uprostiti primenom zakona Bulove algebre.

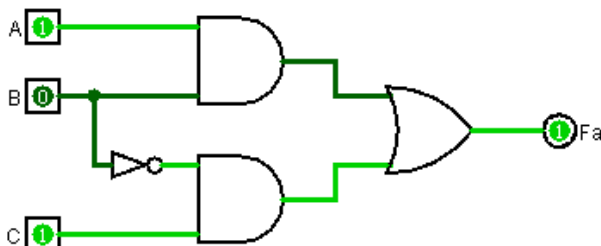


Slika 9: Primeri mreža sa logičkim kolima

Zadatak Nacrtati šeme, simulirati u programu *Logisim* i napisati tablice istinitosti sledećih funkcija:

- a) $F_a = A \cdot B + \bar{B} \cdot C$
 b) $F_b = ((A \oplus B) \oplus C) \cdot (A + B + C)$
 c) $F_c = \overline{A \cdot B} + \bar{B} + C + (\bar{B} \oplus C)$

Rešenje (a):



Logička šema

A	B	C	F_a
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tablica istinitosti

Zadatak Primenom zakona Bulove algebre uprostiti sledeće funkcije:

- a) $W = \overline{A \cdot B} + \overline{A + C}$
 b) $X = A \cdot (B + C) + B \cdot C$
 c) $Y = \overline{A \cdot B + C} + B \cdot \bar{C}$
 d) $Z = A \cdot B + (\bar{A} + C)$
 e) $U = \overline{A \cdot B \cdot C} + \overline{A \cdot D} + (A + D) \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{D}$
 f) $V = \overline{\overline{A \cdot B} + C \cdot D} + \overline{A \cdot C \cdot \bar{D}}$
 g) $M = \overline{\overline{A + B} \cdot B \cdot C} + \bar{B} \cdot C$
 h) $N = \overline{A \cdot B \cdot \bar{C} + D} + \overline{A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{C}}$
 i) $I = (C + D) \cdot \overline{A \cdot \bar{C} \cdot D} \cdot (\bar{A} \cdot C + \bar{D})$